DOI:

НЕСОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Цодиков Ю.М.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
tsodikov@ipu.ru

Аннотация: В докладе показана сложность задачи диагностики противоречивых ограничений модели оптимального планирования производства нефтеперерабатывающего завода. Приведены специальные задачи линейного программирования, для которой возможен теоретический анализ сложности диагностики несовместных ограничений. Анализ несовместного решения специальных задач оптимального планирования позволяет установить некоторые свойства несовместных задач.

Ключевые слова: оптимальное производственное планирование, несовместная задача, противоречивые модели.

Введение

Анализ несовместного решения специальных задач оптимального планирования позволяет установить некоторые свойства несовместных задач. Понимание эти свойства помогает анализировать несовместные решения обычных задач оптимального планирования производства завода, которые не имеют каких-либо особеностей структуры. Это также важно для обоснования алгоритмов анализа причин несовместных решений. При оптимальном планировании производства обычно выдвигаются требования достижения высокой эффективности и получения определенного количества продуктов при ограниченных ресурсах, что зачастую приводит к противоречивой модели. В модели оптимального планирования производства присутствие противоречивых требований закономерно. Противоречивые требования могут приводить к несовместной задаче. Модели оптимального планирования производства имеют, как правило, большую размерность. В этом случае трудности содержательной интерпретации несовместного решения являются одним из основных факторов, ограничивающих применение моделей большой размерности. Опыт применения систем оптимального планирования показывает, что эта проблема вынуждает специалистов плановых служб заводов и компаний в сложных случаях упрощать задачу для получения результатов расчетов в требуемые сроки. Необходимо понимать, что значительное время уходит не на комьютерный расчет, а на анализ результатов специалистом и обсуждение с другими специалистами возможных изменений ограничений в сложившейся ситуации. Эти обстоятельства приводят к тому, что специалисты по моделированию, ответственные за расчет плана, стремятся ограничить размерность задачи планирования. Модель оптимального планирования производства может быть несовместной в результате недостаточного количества ресурсов для выполнения поставленных задач в плановом периоде; ошибок в структуре и параметрах модели; а также совместного действия этих двух факторов. При планировании производства специалисты плановой службы завода часто вносят изменения в модель, что может приводить к противоречивым ограничениям.

При получении несовместного решения специалист должен: (1) анализируя результаты, найти ограничения, которые являются причиной несовместного решения, а затем (2) определить ресурсы, которые возможно дополнительно выделить в данных условиях работы завода. Это две сложные интеллектуальные задачи. Первая задача является интерпретацией или диагностикой несовместного решения. Когда определены ограничения, являющиеся причиной несовместного решения, то можно рассчитать варианты с изменением этих ограничений так, чтоб получить допустимое решение. Однако, ограниченные ресурсы, являющиеся причиной несовместного решения, могут быть такие, что их невозможно изменить в сложившихся условиях. Например, поступившее на завод сырье необходимо переработать в плановом периоде, остановленные на ремонт установки нельзя ввести в эксплуатацию до окончания ремонта, действующие договоры необходимо выполнять. В таком случае нужно найти другие ограниченные ресурсы, которые можно изменить так, чтобы получить допустимое решение, либо установить, что это невозможно. Для этого рассчитывают разные варианты и анализируют результаты, что требует значительного времени и может помешать получить результаты расчета плана в требуемые сроки, что, в свою очередь, ограничивает применение моделей планирования большой размерности.

Существуют также другие факторы, которые ограничивают размерность задач оптимального планирования: производственная структура компании, организация транспорта продукции и сырья, организационная структура служб, принимающих решения по вопросам планирования. Все эти факторы учитываются при разработке модели и работе специалистов плановой службы, применяющих модели планирования.

При применении линейного программирования (ЛП) для решения задачи оптимального планирования в случае несовместных ограничений симплекс метод дает список найденных несовместных ограничений, который, как правило, не позволяет однозначно определить, какие ограниченные ресурсы являются причиной несовместности. Список несовместных ограничений получается на первом этапе симплекс метода при одинаковых штрафах за нарушение любых ограничений. Аналогичный список получается при применении других методов решения задачи ЛП.

В системах оптимального планирования производства для анализа несовместных ограничений предусматривают возможность избирательно задавать различные штрафы за нарушение ограничений по разным типам ресурсов, например, для количества сырья, количества производимых продуктов, величины запасов и других ресурсов. При большой размерности задачи планирования анализ полученных вариантов для интерпретации несовместного решения является достаточно сложной задачей.

Вопрос о сложности интерпретации решения несовместной задачи актуален при применении моделей большой размерности в производственных условиях, когда есть определенные сроки для расчета плана и анализа результатлв, а также при обучении специалистов плановых служб.

Проблема интерпретации несовместных ограничений рассматривается далее для задачи планирования производства нефтеперерабатывающего завода (НПЗ). Сложность этой задачи определяется информационной сложностью модели, в которой различные параметры взаимосвязаны (качество сырья, режимы установок, запасы сырья установок, количество и качество нефтепродуктов). В докладе обоснован метод упорядоченного выбора вариантов для анализа несовместных ограничений.

1 Методы и программы анализа несовместных ограничений

Несовместные задачи оптимального планирования рассматривались в работах по линейному программированию [1-2]. Возможность анализа несовместных задач для диагностики противоречивых ограничений предусматривается в различных системах оптимального производственного планирования и пакетах программ оптимизации [3-4].

Кратко рассмотрим следующие методы анализа несовместных ограничений:

1.Корректировка элементов матрицы [5-6]. В ряде работ рассматривается задача корректировки любых элементов матрицы ограничений так, чтобы получить допустимое решение. Аналогичный подход для производственного планирования не рассматривается, так как большую часть ограничений нельзя изменять. В том числе нельзя изменить ограничения на качество продуктов (они определены стандартами), условия материального баланса, максимальную производительность установок и другие. Но такой подход возможен в других сферах применеия ЛП, в том числе для построения согласованной модели.

2.Определение множества неприводимых несовместных ограничений (irreducible infeasible sets - IIS). IIS - это минимальный набор ограничений, которые сами по себе несовместны, но становится допустимыми, если какое-либо ограничение (или несколько) удалены [7-8]. В оптимизаторе Xpress предлагается общий метод анализа несовместности, состоящий в том, чтобы найти небольшую часть матрицы, которая сама по себе несовместна [4]. Оптимизатор Xpress делает это, находя неприводимые несовместные множества ограничений - IIS. Методы IIS для различных задач исследованы в [7]. Предполагается, что выявление IIS помогает объяснентъ причины противоречивости ограничений. В руководстве Xpress отмечается, что поиск причины несовместности, который основан на IIS, может оказаться очень длительным [4]. Это связано с большой размерностью моделей. Кроме того, несовместная задача может быть такая, что в матрице ограничений нет IIS, включающих небольшую часть матрицы.

3.Введение штрафных переменных. Введение диференцированных штрафов за нарушение разных групп ограничений предусмотрено в системе RPMS [3]. Аналогично штрафы вводятся за нарушение ограничений в системе PIMS и других системах применяемых для оптимального планирования производства. Такие системы оптимизации применяются практически во всех нефтяных компаниях в мире. В разных программах оптимизации предусмотрено введение штрафов за нарушение отдельных ограничений. В руководстве Xpress также предлагается вводить переменные - отклонения в ограничениях, чтобы сделать их допустимыми и эти отклонения штрафуются в целевой функции, таким образом, вводятся штрафные функции. Трудность анализа результатов задачи со штрафными переменными состоит в том, что в решении часто получается достаточно много не нулевых отклонений в ограничениях, в то время как причиной несовместности может быть одно ограничение. Но в решении может быть и простой вариант с одной штрафной переменной, имеющей не нулевое значение. Такие закономерности несовиестных задач рассматриваются в данном отчете.

Кроме перечисленных описаны и другие методы анализа, но по 3-м перечисленным методам существенно больше публикаций. При любом методе нужно также определить взаимосвязи несовместного ограничения модели с другими ограничениями.

2 Модель оптимального планирования и анализ несовместных ограничений

Модель оптимального планирования работы НПЗ на один период имеет следующий вид [9-11]:

$$(1)\ F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jr} \qquad F \to max$$

$$(2) \sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{jr} = b_i, \ \ i = 1, \ldots, m, \ \ x_{jr} \geq 0, \ \ x_{jr}$$

$$(3)\ a_{ijr} = f_{ij}(q_{ijr-1})$$

$$(4)\ q_{ijr-1} = \varphi_{ij}(x_{1r-1}, x_{2r-1}, \ldots, x_{nr-1})$$

Здесь F - прибыль, x_{jr} - переменные задачи, потоки сырья, продукта или энергоносителя*;*

r – шаг рекурсии, состоящий в решении задачи (1-2), a_{ijr} - коэффициенты матрицы $A^r\{a_{ijr}\}$; c_j - цены, b_i - коэффициенты ограничений.

Часть коэффициентов матрицы a_{ijr} являются постоянными величинами, а другие определены соотношениями (3, 4). Задача ЛП (1-2) решается при заданных начальных значениях величин q_{ij0} и коэффициентов матрицы. После решения задачи ЛП (1-2) те коэффициенты матрицы a_{ijr}, которые определены зависимостями (3-4), пересчитываются на каждом шаге r вычислительного процесса. При первом решении задачи (1-2) r=1 начальные значения показателей q_{ij0} заданы. Задача (1-4) по существу является нелинейной со значительным числом переменных, которые входят в нелинейные зависимости (3-4).

Форма записи задачи (1-4) предполагает решение методом последовательного моделирования и оптимизации, который рассматривается как вариант метода последовательного линейного программирования (ПЛП) [9-10]. В результате моделирования (3-4) определяются параметры линеаризованной модели, а затем решается задача линейного программирования (1-2). Если нет допустимого решения задачи (1-2), то процесс завершается и затем нужно анализировать несовместное решение. Если есть допустимое решение, то после получения решения задачи ЛП проверяется точность моделирования путем сравнения значений параметров: q_{ijr-1} и q_{ijr}, а также коэффициентов матрицы a_{ijr}, которые пересчитываются. Этот процесс рекурсивно повторяется до получения заданной точности моделирования и линеаризации:

$$(5)\quad | \ q_{ijr} - q_{ijr-1} \ | \leq \varepsilon_k$$

Величины q_{ijr} имеют разную физическую природу и для каждого показатель качества k возможна разная точность определения ε_k .

Минимальные параметры ЛП модели НПЗ на один период: переменных 1000 – 2000, ограничений 2000 – 4000, ненулевых элементов матрицы 10000 – 20000. При такой размерности модели, при отсутствии допустимого решения проявляются трудности интерпретации несовместных ограничений. Сложность модели характеризуется также нелинейными зависимостями (3-4), по которым пересчитывается около 10% ненулевых элементов матрицы. Для многопериодной модели размерность возрастает.

3 Метод выбора вариантов для анализа несовместных ограничений

Несовместное решение задачи ЛП (1-2) может быть получено при первом шаге решения r=1 или при следующих рекурсиях на шаге r>1. Для содержательной интерпретации несовместного решения в модель вводят штрафы u_i>0, v_i>0 с разными коэффициентами d_i за нарушение некоторых типов ограничений. После введения штрафных переменных вместо (1-2) получим следующие ограничения и критерий:

$$(6)\ F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jr} - \sum_{i=1}^{m} d_i(u_i + v_i) \qquad F \to max$$

$$(7)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{jr} - u_i + b_i, \quad i = 1, \dots, m, x_{jr} \geq 0, u_i \geq 0, v_i \geq 0.$$

После введения штрафных переменных система (6-7) становится совместной. В полученном решении анализируются величины штрафных переменных. Введение штрафов является инструментом исследования модели. Такая возможность исследования модели предусматривается в различных системах оптимального планирования [3, 12]. В системе моделирования НПЗ [3] можно ввести штрафы избирательно с разными коэффициентами d_i за нарушение различных типов ограничений: показателей качества нефтепродуктов, производительности установок, условий материального баланса, запасов нефтепродуктов, энергозатрат и других. С целью исследования вводят штрафные переменные и по тем ограничениям, которые невозможно изменить по технологическим условиям производства.

Специалист по планированию вводит штрафные переменные в соответствии со своими представлениями о возможных причинах несовместности, основанных на своих знаниях модели, системы моделирования, технологии производства и текущих условий работы завода. Необходимая информация получается путем совместной работы группы специалистов по планированию с технологами, производственным отделом, лабораторией и другими службами. Для определения причин несовместности рассчитывается и анализируется несколько вариантов с различными коэффициентами d_i для штрафных переменных. Сформированные варианты отражают данные модели и человеческий фактор - знания специалистов. На выбор этих вариантов и их анализ затрачивается много времени специалистов плановой службы НПЗ. В результате часто возникают трудности в расчете плана к нужному сроку.

Логично предположить, что для варианта с меньшим числом штрафных переменных u_i>0 , v_i>0 проще анализировать несовместные ограничения и дать интерпретацию этим ограничениям. Эта гипотеза о сложности интерпретации может быть объяснена геометрией пространства несовместных ограничений для задачи ЛП специальной структуры.

Примем следующий метод выбора вариантов со штрафными переменными для анализа несовместных задач с целью сократить перебор вариантов. Метод выбора основан на предположении, что полученное решение со штрафами будет проще содержательно интерпретировать при меньшем числе несовместных ограничений. Из нескольких решений с разными штрафами (обычно 2-4) выбираем один вариант с минимальным числом ограничений, которые нарушаются на величину штрафной переменной. В выбранном варианте, прежде всего, анализируем те ограничения со штрафами, которые повторяются и в других вариантах. В процессе анализа выбранного варианта решаются задачи с изменением некоторых ограничений, и специалист определяет, какие ресурсы можно изменить для получения допустимого решения.

Такая методика выбора вариантов для анализа несовместных задач применялась при разработке моделей НПЗ. При разработке модели часто выявляются ошибки, вызванные тем, что не учитываются направления потоков в специальных условиях: при ремонтах, при снижении количества сырья, изменении качества сырья и в других ситуациях. Описанный метод выбора вариантов позволял быстрее находить ограничения, которые стали причиной несовместного решения. При тестировании модели некоторые ошибки модели выявляются только при недостаточных или избыточных ресурсах. В этом случае задача без штрафных переменных является несовместной. В процессе обучения специалистов НПЗ анализу несовместных задач описанный метод выбора варианта оказался более успешным по сравнению с случайным выбором варианта, так как позволял быстрее найти те ограничения, которые являлись причиной несовместного решения.

4 Закономерности несовместных ограничений

Вся трудность анализа несовместной задачи состоит в том, что в результате решения часто получается много не нулевых переменных u_i>0, v_i>0 в ограничениях в том случае, когда достаточно изменить только одно ограничение для получения допустимого решения.

В результате анализа результатов расчетов с моделями планирования различных заводов при получении несовместных ограничений наблюдаются следующие закономерности:

1. Одно противоречивое условие в модели может вызвать значительное число штрафных переменных $u_i > 0$, $v_i > 0$.
2. С ростом размерности задачи возрастает число штрафных переменных $u_i > 0$, $v_i > 0$, возникающих при одном противоречивом условии в модели.
3. Группа не нулевых штрафных переменных $u_i > 0$, $v_i > 0$ не является стабильной. Состав группы зависит от различных факторов, например, от величин коэффициентов штрафов.
4. Несовместное ограничение, как правило, не изолированно и связано со многими другими ограничениями.

Перечисленные закономерности проявляются достаточно часто, но наряду с этим есть простые случаи, когда одно противоречивое условие в модели приводит к одному несовместному ограничению. По смыслу задачи для НПЗ разные ограничения (2) существенно связаны между собой. Например, условия по производительности установок, количеству нефти, качеству нефти и другие могут приводить к одним и тем же несовместным ограничениям.

2 Специальные задачи ЛП

Рассмотрим две специальные задачи ЛП: задачу оптимального смешения нефтепродуктов и задачу с *n* переменными и $m=n+1$ динейно независимыми неравенствами. Первая задача является примером простой интерпретации несовместного решения, а вторая примером максимально сложной диагностики причин несовместного решения.

Системы оптимального планирования планирования и управления смешением нефтепродуктов применяется на многих НПЗ. Задача оптимального смешения в случае несовместного рещения допускает простую интерпретацию причин несовместности. Для этого в модель в качестве штрафов вводятся дополнительные переменные – дополнительное количество каждого компонента. При таком введении штрафных переменных в результате решения несовместной задачи будет получено сколько и каких компонентов нужно добавть для приготовления достаточного количества нефтепродуктов. При таком введении штрафных переменных также возможно сформулировать свойства несовместной задачи, которые аналогичны приведенным выше законоиерностям.

Рассмотрим специальную несовместную задачу ЛП с *n* переменными и *m* ограничениями неравенствами при $m=n+1$. Выпишем задачу ЛП в удобном для дальнейшего виде:

$$(8)\quad F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad F\rightarrow \max$$

$$(9)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad i=1,...m,\ x_i \geq 0,\ m=n+1.$$

Для задачи (8-9) обозначим допустимое множество задачи М и допустимое множество двойственной задачи М*. Будем рассматривать несовместную задачу 1-го рода, когда нет допустимого решения прямой задачи (М пусто) и есть решение двойственной задачи на множестве М* [5]. Такие задачи имеют экономический смысл. Для каждого ограничения (9) $i=1, \ldots, m$ построим дополнение с обратным знаком неравенства: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$

Следующая система ограничений (10) образуется пересечением дополнений:

$$(10)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i=1,...m,\quad x_j \geq 0 .$$

Рассмотрим несовместную задачу (8-9), которая имеет следующие свойства:

1.Система несовместных ограничений (9) такая, что при исключении любого одного неравенства система имеет допустимое решение.

2.Все ограничений неравенства системы (9) линейно независимы.

3. Пересечение дополнений (10) образует замкнутое множество.

Симплекс метод на этапе поиска допустимого решения задачи (8-9) определяет дополнительные переменные u_i из условия:

$$(11) \quad \varphi = \min \sum_{i=1}^{m} u_i$$

$$(12) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i \geq b_i \ , \ i=1,...m, \ x_i > 0, \ u_i > 0.$$

На этапе поиска допустимого решения (11-12) симплекс метод даст список несовместных ограничений, включающий некоторые ограничения с переменными $u_i > 0$, $i=1, \ldots, m$.

Для задачи (8-9) и системы ограничений (10) справедливы следующие утверждения:

1.На этапе поиска допустимого решения (8-9) некоторые переменные $u_i > 0$. Таким образом, для определения на содержательном уровне, какое из m ограничений (9) является причиной несовместности задачи необходимо проверить влияние каждого ограничения.

2.При росте размерности задачи число несовместных ограничений (9) возрастает линейно.

3.Система ограничений (10) образует симплекс.

Специальная задача интересна тем, что свойства задачи ЛП (8-9) аналогичны закономерностям, которые описаны выше для общей задачи ЛП, когда она становится несовместной. Таким образом, задача (8-9) удобна при обучении для объяснения сложности диагностики несовместных ограничений задач планирования большой размерности.

Литература

1. *Dantzig G.B.* Linear programming and extensions. Princeton University Press. 1998.
2. *Orchard-Hays W. 1968.* Advanced Linear-Programming Computing Techniques. McGraw-Hill. 355 p.
3. Refinery and Petrochemical Modeling System (RPMS). Reference Manual. www.honeywell.com.
4. Xpress Optimizer Reference Manual. www.fico.com/fico-xpress-optimization.
5. *Еремин И.И.* Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 305с.
6. *Попов Л.Д.* Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. –2012, №3, –С.3–11.
7. *Chinneck J.W.* Feasibility and infeasibility in optimization. Springer 2008. p.270.
8. *Greenberg H.J.* Computer–Assisted Analysis for Diagnosing Infeasible or Unbounded. Linear Programs, Mathematical Programming Studies Vol.31, 1987. –p.79–97.
9. *Coxhead R.E.* Integrated Planning and Scheduling Systems for the Refining Industry // Optimization in industry. Mathematical Programming and Modeling Techniques in Practice. Ed. Ciriani T.A., Leachman R.C. J. - Wiley&Sons, 1994. - P. 185-199.
10. *Lasdon L.S.* An improved successive linear programming algorithm. Management Science. – 1985, – Vol. 31, N10, –P.1312–1331.
11. *Цодиков Ю.М., Хохлов А.С.* Нелинейные модели оптимального планирования работы нефтеперерабатывающего завода // Тр. VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013) Т.2 / М: ВЦ РАН, 2013. –С. 54–56.
12. *Цодиков Ю.М.* Информационная модель решения несовместной задачи оптимального планирования производства 2018, №4. –С. 55-62.
13. *Цодиков Ю.М.* Диагностика противоречивых ограничений модели оптимального планирования производства / Материалы 12-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2019, Москва). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 418.
14. *Цодиков Ю.М.* Интерпретация несовместного решения задачи оптимального планирования работы НПЗ / Труды 9-й Московской международной конференции по исследованию операций (ORM-2018, Москва). М.: МАКС Пресс, 2018. Т. 2. С. 233-237.