

DOI:
**ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЗАПАСОВ ГАЗА ПО
КАТЕГОРИЯМ**

Скиба А.К.,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
Россия, г. Москва, ул. Вавилова 40
a.k.skiba@mail.ru

Скиба Н.К.
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»
Россия, г. Краснодар, ул. Московская 2
n_skiba@mail.ru

Аннотация: Рассматривается непрерывная агрегированная детерминированная динамическая модель движения запасов газа по категориям. Каждая категория, в соответствии классификацией запасов горючих газов, характеризуется своим уровнем знаний об объекте - носителе информации о запасах. Движение запасов газа по категориям описывается системой дифференциальных уравнений и схематично изображается на рисунке. При переходе из одной категории в другую в модели учитывается степень подтверждаемости запасов.

Особое внимание уделяется кратности запасов. Для определения коэффициента кратности вводится временная функция, определяющая суммарные разведанные запасы природного газа. Делаются априорные предположения о ее свойствах.

Анализируются шесть конкретных примеров. Для каждого примера определяется коэффициент кратности запасов, динамика которого подвергается анализу. Даются объяснения об особенностях поведения коэффициента кратности. Делаются соответствующие выводы.

Ключевые слова: модель месторождения со взаимовлияющими скважинами, категории запасов газа, коэффициент кратности запасов газа, классификация запасов газа, модель движения запасов газа по категориям, функция разведанности запасов газа.

Введение

Деятельность любой отрасли горнодобывающей промышленности характеризуется не только непрерывным расходом запасов полезного ископаемого, но и его пополнением за счёт разведки. В зависимости от степени разведанности и изученности запасы газа подразделяются на различные по достоверности категории и группы.

В соответствии с классификацией запасов горючих газов [1] геологические запасы природных газов и содержащихся в них сопутствующих компонентов, имеющих промышленное значение, по степени изученности подразделяются на разведанные категории A , B и C_1 и предварительно оцененные - категория C_2 .

Ресурсы газа по степени их обоснованности подразделяются на перспективные - категория C_3 и прогнозные - категории D_1 и D_2 .

Таким образом, каждая категория характеризуется своим уровнем знаний о запасах (ресурсах) природного газа [2]. Знания о запасах (ресурсах) основывается на перечне работ, проведенных на изучаемых объектах, и информации, полученных из предыдущих категорий.

По мере исследования запасов (ресурсов) газа и перемещения его носителя из менее изученной категории в более изученную категорию изменяется представление об объекте и его характеристиках. Также подвергаются изменению методы и способы определения тех или иных характеристик объекта, уточняется их количественная оценка. С учётом этих особенностей рассматривается математическая модель движения запасов природного газа по категориям.

Здесь и далее ресурсы газа мы будем называть запасами.

1 Модель движения запасов природного газа по категориям

Перейдем к описанию математической модели единичного объекта газодобычи, которым может быть отдельная залежь, месторождение или перспективная структура. Модель разработана как составная часть системы планирования добычи газа [3,4] и предназначена для составления с её помощью вариантов долгосрочных планов добычи газа по региону, в котором расположена группа подобных объектов. В отличие от других известных авторам моделей газодобычи данная модель включает дополнительно разведку на менее изученных объектах, что позволяет пополнять истощаемые в процессе разработки запасы газа.

Модель позволяет скоординировать процесс движения запасов по категориям, учитывая различную степень их изученности.

Разведка в рассматриваемой модели осуществляется на запасах газа категорий A, B, C_1, C_2, C_3 и D_1 в соответствии с различной степенью их изученности. В процессе разведки меняются и уточняются наши представления о запасах газа. Это создает основу для перевода запасов газа из менее разведанных категорий в более разведанные категории. Процесс движения запасов газа завершается извлечением его из наиболее изученной категории. Движение запасов природного газа по категориям представлено на рис. 1.

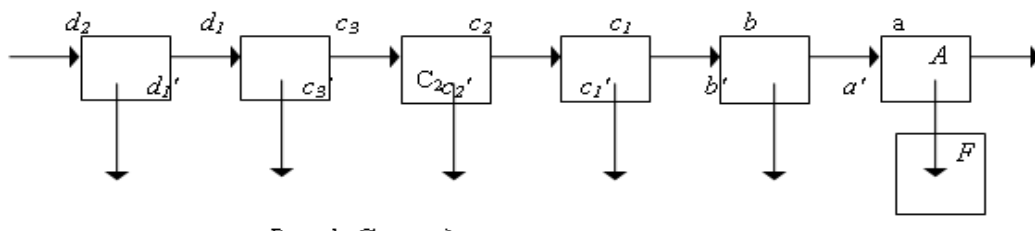


Рис. 1. Схема движения запасов газа по категориям.

Здесь: A, B, C_1, C_2, C_3 и D_1 - объёмы запасов соответствующих категорий;

F - объёмы запасов газа категории A , оставшихся не извлечёнными по технологическим или экономическим причинам;

a - добыча природного газа;

a' - потеря запасов категории A , вследствие их неполного извлечения;

b, c_1, c_2, c_3, d_1 и d_2 - потоки запасов газа из соответствующих менее разведанных категорий в более разведанные;

b', c_1', c_2', c_3' и d_1' - изменения запасов соответствующих категорий по причине неподтверждения первоначальных данных при более детальной разведке.

В дифференциальной форме движение запасов газа во времени можно представить следующими уравнениями

$$(2) \quad \dot{B} = c_1 - b - b';$$

$$(3) \quad \dot{C}_1 = c_2 - c_1 - c_1';$$

$$(4) \quad \dot{C}_2 = c_3 - c_2 - c_2';$$

$$(5) \quad \dot{C}_3 = d_1 - c_3 - c_3';$$

$$(6) \quad \dot{D}_1 = d_2 - d_1 - d_1';$$

$$(7) \quad \dot{F} = a'.$$

Введём понятие текущего коэффициента извлечения запасов η_a и понятие текущих коэффициентов подтверждаемости запасов $\eta_b, \eta_{c1}, \eta_{c2}, \eta_{c3}$ и η_{d1} соответствующих категорий следующим образом:

$$\eta_a = \frac{a}{a+a'};$$

$$\eta_b = \frac{b}{b+b'};$$

$$\eta_{c1} = \frac{c_1}{c_1+c_1'};$$

$$\eta_{c2} = \frac{c_2}{c_2+c_2'};$$

$$\eta_{c3} = \frac{c_3}{c_3+c_3'};$$

$$\eta_{d1} = \frac{d_1}{d_1+d_1'};$$

Уравнения (1)-(7) можно переписать в следующем виде:

$$(8) \quad \dot{A} = b - \frac{a}{\eta_a};$$

$$(9) \quad \dot{B} = c_1 - \frac{b}{\eta_b};$$

$$(10) \quad \dot{C}_1 = c_2 - \frac{c_1}{\eta_{c1}};$$

$$(11) \quad \dot{C}_2 = c_3 - \frac{c_2}{\eta_{c2}};$$

$$(12) \quad \dot{C}_3 = d_1 - \frac{c_3}{\eta_{c3}};$$

$$(13) \quad \dot{D}_1 = d_2 - \frac{d_1}{\eta_{d1}};$$

$$(14) \quad \dot{F} = \frac{1-\eta_a}{\eta_a} a.$$

В расчётах вариантов долгосрочных планов добычи газа по Северо-Гюменской газоносной провинции коэффициент η_a принимали равным величине 0.85. При этом предполагалось, что оставшиеся 15% запасов (или их часть) могут в дальнейшем использоваться как низконапорный газ. Подтверждаемость запасов зависит от категории, к которой они относятся. Это объясняется тем, что при переводе запасов из менее разведанных категорий в более разведанные категории мы получаем дополнительную информацию. С ее помощью уточняются многие характеристики, в том числе и объёмы запасов природного газа. В то же время подтверждаемость запасов одной и той же категории колеблется в некоторых пределах. Например, в зависимости от района для категории C_2 подтверждаемость запасов колеблется от 0.3 до 1.0, а для категории D_1 подтверждаемость колеблется от 0.1 до 0.6-0.7.

Рассмотрим стационарный режим, когда

$$\dot{A} = \dot{B} = \dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \dot{C}_3 = \dot{D}_1$$

в уравнениях (8)-(13) и, учитывая, что $\eta_a \leq 1, \eta_{b\leq} \leq 1, \eta_{c1} \leq 1, \eta_{c2} \leq 1, \eta_{c3} \leq 1, \eta_{d1} \leq 1$ получим следующие неравенства $d_2 \geq d_1 \geq c_3 \geq c_2 \geq c_1 \geq b \geq a$.

Как видно из последнего неравенства, в стационарном режиме потоки запасов природного газа из менее разведанной категории должны быть не меньше потоков из более разведанной категории.

2 Кратность запасов

При планировании прироста запасов в газодобывающем районе с учётом различных категорий запасов особую роль играет коэффициент кратности запасов. Коэффициент кратности запасов подсчитывается для разведанных запасов природного газа и представляет собой частное от деления текущих разведанных запасов на годовую добычу газа

$$(15) \quad W = \frac{A+B+C_1}{a}.$$

Таким образом, коэффициент кратности показывает, на сколько лет обеспечивают разведанные запасы добычу природного газа, если добыча его сохраняется на том же уровне, что и в настоящее время. Данную формулу для расчёта кратности запасов можно использовать в период растущей и постоянной добычи.

При расчёте коэффициента кратности в период падающей добычи по формуле (15) мы наблюдаем на первый взгляд парадоксальную ситуацию. Добыча падает, а обеспеченность запасами растёт, что создаёт видимость благополучия. Это легко объясняется тем, что темп падения добычи больше темпа уменьшения разведанных запасов.

Вернёмся к схеме, показанной на рис. 1 и ограничимся рассмотрением только категорий разведанных запасов A, B и C_1 . Для простоты изложения положим $\eta_b = \eta_{c1} = 1$. Тогда уравнения (8)-(10) переписутся в следующем виде:

$$\dot{A} = b - \frac{a}{\eta_a};$$

$$\dot{B} = c_1 - b;$$

$$\dot{C}_1 = c_2 - c_1.$$

Сложим эти уравнения, получим

$$\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}_1 = c_2 - \frac{a}{\eta_a}$$

Введём новую функцию $\Phi(t)$ такую, что $\dot{\Phi}(t) = c_2(t)$ и $\Phi(-\infty) = 0$. Функция $\Phi(t)$ определяет суммарные запасы природного газа, разведанные ко времени t , т.е.

$$\Phi(t) = A + B + C_1 + \int_{-\infty}^t a(t)dt + \int_{-\infty}^t a'(t)dt$$

Производная $\dot{\Phi}(t)$ - характеристика, определяющая эффективность поисково-разведочных работ. Как было установлено мировым опытом разведки, эффективность этих работ растёт в начальный период времени до достижения примерно 25-30% реализации начальных потенциальных ресурсов газа, а затем падает. Это объясняется тем, что в начальный период освоения территорий в разведку вовлекаются наиболее крупные залежи, а на завершающей стадии - мелкие, с более сложным геологическим строением. Такая закономерность наиболее ярко проявляется в Северо-Тюменской газоносной провинции.

Исходя из вышесказанного, можно предположить, что $\Phi(t)$ - возрастающая непрерывно дифференцируемая выпукло-вогнутая функция и $\Phi(\infty) = 0$. Кроме того, если $\Phi(\bar{t}) = 0$ для некоторого момента \bar{t} , тогда $C_1(t) \equiv 0$; $B(t) \equiv 0$; $A(t) \equiv 0$; $a(t) \equiv 0$; $a'(t) \equiv 0$ для $t \in (-\infty, \bar{t})$.

Следует отметить, что такие особенности функции $\Phi(t)$ характерны для производственных функций [5].

Обозначим разведанные запасы через R , т.е. $R = A + B + C_1$, тогда формула определения кратности запасов (15) и уравнение (16) представляются в виде:

$$W = \frac{R}{a}$$

$$(17) \quad \dot{R} = (\dot{W}a) = \dot{\Phi} - \frac{a}{\eta_a}$$

Предполагаем, что коэффициент извлекаемости запасов η_a равен константе.

Рассмотрим несколько конкретных примеров. Будем считать, что процесс разработки запасов газа рассматривается при $t \geq 0$.

Пример 1. Пусть величина разведанных запасов остаётся постоянной, т.е. $\dot{R} = 0$. Тогда из (17) вытекает

$$Wa = const$$

и

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{1}{\eta_a} \int_0^t a(t)dt.$$

Исходя из предположения, что добыча в начальный период эксплуатации запасов растёт, затем стабилизируется и в конечный период эксплуатации падает, коэффициент кратности ведёт себя следующим образом. В начальный период он падает, затем постоянен и в конце эксплуатации растёт. Аналогичное поведение коэффициента кратности в конце эксплуатации мы наблюдали в случае, описанном в начале параграфа, но в отличие от него увеличение кратности здесь связано с пополнением запасов за счёт запасов категории C_2 .

В данном случае разведанные запасы пополняются так, чтобы компенсировать потери, связанные с добычей природного газа, а также с неполным их извлечением.

Пример 2. Предположим, что добыча постоянна и $\Phi(0) = 0$. Если $\Phi(0) = 0$, то величина начальных разведанных запасов равна нулю. Из определения коэффициента кратности вытекает $W(0) = 0$. Уравнение (17) переписывается в следующем виде

$$a\dot{W} = \dot{\Phi} - \frac{a}{\eta_a}$$

Отсюда следует

$$W(t) = \frac{1}{a} \Phi(t) - \frac{t}{\eta_a}$$

Для того, чтобы коэффициент кратности был положителен, необходимо на эффективность поисково-разведочных работ в начальный момент наложить ограничение

$$(18) \quad \dot{\Phi}(0) > \frac{a}{\eta_a}$$

т.е. в начальный момент времени разведанные запасы должны пополняться с большим темпом, чем темп их расходования.

Так как $\dot{\Phi}(\infty) = 0$, то существует момент времени $t^* > 0$ такой, что $W(t^*) = 0$.

Иными словами, в момент времени t^* расходуется весь разведанный запас. Таким образом, поведение коэффициент кратности корректно рассматривать только на временном отрезке $[0, t^*]$. На этом отрезке времени коэффициент кратности положителен и сначала он растёт, а затем падает.

Пример 3. Предположим, что коэффициент кратности константа и $\Phi(0) = 0$.

Из определения коэффициента кратности вытекает, что $a(0) = 0$. Перепишем уравнение (17) в виде

$$\dot{a} + \frac{a}{W\eta_a} = \frac{\Phi}{W}.$$

Проинтегрировав его, получим

$$(19) \quad a(t) = \frac{1}{W} \exp\left(-\frac{t}{\eta_a W}\right) \int_0^t \Phi(\theta) \exp\left(\frac{\theta}{\eta_a W}\right) d\theta.$$

Добыча природного газа для всех $t > 0$ положительна. Покажем, что для любой малой величины $\delta > 0$ предел $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) < \delta \eta_a$. Решим уравнение $\Phi(t) = \delta$ относительно t . Среди всех решений найдем максимальное решение и обозначим его через τ . Преобразуем правую часть формулы (19). В результате получаем

$$(20) \quad a(t) = \frac{1}{W} \exp\left(-\frac{t}{\eta_a W}\right) \int_0^\tau \Phi(\theta) \exp\left(\frac{\theta}{\eta_a W}\right) d\theta + \frac{1}{W} \exp\left(-\frac{t}{\eta_a W}\right) \int_\tau^t \Phi(\theta) \exp\left(\frac{\theta}{\eta_a W}\right) d\theta < \\ \frac{1}{W} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\eta_a W}\right) \Phi(\tau) + \frac{1}{W} \exp\left(-\frac{t}{\eta_a W}\right) \int_\tau^t \Phi(\theta) \exp\left(\frac{\theta}{\eta_a W}\right) d\theta < \\ \frac{1}{W} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\eta_a W}\right) \Phi(\tau) + \delta \eta_a [1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\eta_a W}\right)].$$

В неравенстве (20) перейдем к пределу $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) < \delta \eta_a$. Значит, добыча природного газа стремится на бесконечности к нулю.

Пример 4. Предположим, что добыча газа падает по линейному закону $a(t) = a^0 - \alpha t$ и $\Phi(0) = 0$.

Из предположения $\Phi(0) = 0$ вытекает, что $W(0) = 0$. В этом случае решение уравнения (17) переписывается в следующем виде

$$(21) \quad W(t) = \frac{\Phi(t)}{a^0 - \alpha t} - \frac{a^0 t - \frac{\alpha}{2} t^2}{\eta_a (a^0 - \alpha t)}.$$

Для того чтобы коэффициент кратности был положителен, необходимо на эффективность поисково-разведочных работ в начальный момент наложить ограничение (18), т.е. в начальный момент времени разведанные запасы должны пополняться с большим темпом, чем темп расходования запаса.

Из (21) найдём все положительные значения t , при которых $W(t) = 0$. Среди всех положительных решений, удовлетворяющих $W(t) = 0$, найдём минимальное значение $\hat{t} > 0$. Если $\hat{t} \in (0, \frac{a^0}{\alpha})$, то коэффициент кратности положителен на интервале $(0, \hat{t})$. В противном случае коэффициент кратности положителен на интервале $(0, \frac{a^0}{\alpha})$.

Коэффициент кратности, определённый на полуинтервале $[0, \frac{a^0}{\alpha})$, стремится при $t \rightarrow \frac{a^0}{\alpha}$ к бесконечности, а коэффициент кратности, определённый на отрезке $[0, \hat{t}]$ в момент времени \hat{t} , обращается в нуль. К моменту \hat{t} расходуются все накопленные за время \hat{t} разведанные запасы.

Пример 5. Рассматривается модель месторождения с взаимовлияющими скважинами, на основе которой были поставлены и решены многие интересные оптимизационные задачи [6-9]. Добыча газа на месторождении при постоянном темпе бурения скважин меняется по закону

$$(22) \quad a(t) = q^0 n t \exp\left(-\frac{q^0 n}{2\Phi(0)} t^2\right), \\ \Phi(0) = \int_0^\infty a(t) dt = \int_0^\infty q^0 n \theta \exp\left(-\frac{q^0 n}{2\Phi(0)} \theta^2\right) d\theta.$$

где q^0 - начальный дебит скважины;

n - постоянный темп бурения скважин на месторождении.

Поскольку бурение скважин начинается в начале разработки месторождения, то количество скважин на месторождении в момент времени t определяется в соответствии с формулой $N(t) = nt$.

Следует отметить, что в этом примере начинают разбуриваться и покрываться равномерной сеткой скважин только запасы, разведанные к моменту $t = 0$. По величине эти запасы равны $\Phi(0)$, что отражается в описании формулы (22). Запасы, поступившие позже, резервируются и в рассматриваемом примере не разрабатываются. Однако они участвуют в подсчете коэффициента кратности запасов газа.

Рассмотрим в динамике поведение добычи газа. Добыча газа с начала равна нулю. Далее она возрастает и достигает своего максимального значения. Затем добыча падает и в пределе стремится к нулевому значению.

Проинтегрируем уравнение (17) с коэффициентом η_a равным единице. В результате получаем

$$W(t) = \frac{\exp\left(\frac{q^0 n}{2\Phi(0)} t^2\right)}{q^0 n t} \left[\Phi(t) - \int_0^t q^0 n \theta \exp\left(-\frac{q^0 n}{2\Phi(0)} \theta^2\right) d\theta \right].$$

Коэффициент кратности положителен. В нуле и на бесконечности он принимает бесконечное значение. Это связано с нулевой добычей природного газа в нуле и на бесконечности.

Пример 6. Предположим, что добыча газа падает по экспоненциальному закону $a(t) = a^0 \exp(-at)$ и $\Phi(0) = 0$. Из предположения $\Phi(0) = 0$ вытекает, что $W(0) = 0$. В этом случае решение уравнения (17) переписывается в следующем виде

$$W(t)a(t) = \Phi(t) - \frac{1}{\eta_a} \int_0^t a(t) dt$$

или

$$W(t) = \frac{\Phi(t)}{a^0} \exp(at) - \frac{1}{a\eta_a} [\exp(at) - 1] = \left(\frac{\Phi(t)}{a^0} - \frac{1}{a\eta_a}\right) \exp(at) + \frac{1}{a\eta_a}.$$

Для положительности коэффициента кратности необходимо в начальный момент наложить ограничение (18).

Далее, если в некоторый момент t^* выполнено неравенство $\Phi(t^*) \geq \frac{a^0}{a\eta_a}$, то, учитывая свойства функции $\Phi(t)$, приходим к выводу, что коэффициент кратности положителен для всех $t > t^*$. В противном случае может существовать \hat{t} такое, что $W(\hat{t}) = 0$, т.е. к моменту \hat{t} израсходуются все разведанные запасы.

Заключение

Подведём краткие итоги изложенной в статье работы. В соответствии с классификацией запасов газа рассматривается динамическая модель движения запасов газа от менее изученных категорий запасов к более изученным категориям. Движение запасов газа завершается на наиболее изученной категории частичным или полным извлечением их из недр.

Между соседними категориями устанавливается связь, описываемая с помощью дифференциальных уравнений. Исследованию подвергается стационарный режим, при котором в каждой категории величина запасов не меняется со временем. Делаются соответствующие выводы.

Далее вводится математическое определение кратности запасов и эффективности поисково-разведочных работ. Для запасов категорий $A + B + C_1$ исследуются шесть режимов при различных предположениях о поведении добычи, кратности запасов и эффективности поисково-разведочных работ.

Построенную в работе динамическую модель можно использовать в качестве инструмента при планировании поисково-разведочных работ. Кроме того модель может являться основой для дальнейших исследований и получения качественных и количественных результатов. Модель может быть детализирована. В неё могут быть включены элементы теории вероятности и математической статистики, что позволит в дальнейшем использовать модель в качестве инструмента при решении различных задач, в том числе при решении вопросов об экономической целесообразности разработки залежей и проведения поисково-разведочных работ.

Поддержка

Работы по данной проблематике поддержаны в 2012 г. Премией им. Н.к. Байбакова «за большие достижения в решении проблем устойчивого развития энергетики и общества».

Литература

1. Классификация запасов месторождений, перспективных и прогнозных ресурсов нефти и горючих газов. Государственная комиссия по запасам полезных ископаемых при Совете Министров СССР.--- М.,1983.
2. *Вяхирев Р.И., Коротаев Ю.П., Кабанов Н.И.* Теория и опыт добычи газа. – М.: Недра, 1998.
3. *Маргулов Р.Д., Хачатуров В.Р., Федосеев А.В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. – М.: Недра, 1992.
4. *Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Злотов А.В. и др.* . Планирование и проектирование освоения нефтегазодобывающих регионов и месторождений: Математические модели, методы, применение / Под ред. В.Р. Хачатурова. – М.: УРСС:ЛЕНАНД, 2015.
5. *Skiba A.K.* Optimal Growth with a Convex-concave Production Function // *Econometrica*. – 1978. – V. 3(46). – P. 527-539.
6. *Skiba A.K.* Maximization of the Accumulated Extraction in a Gas Fields Model. // In: Evtushenko Y., Jacimovic M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), Int. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA 2018) // *Communications in Computer and Information Science*, Springer. 2019. Vol. 974. – P. 453-469. DOI 10.1007/978-3-030-10934-9_32.
7. *Соломатин А.Н., Скиба А.К., Хачатуров В.Р.* Моделирование разработки группы газовых месторождений с учетом их ликвидации. // *Автоматика и телемеханика*. 2018. № 11. – С. 16-31. DOI 10.31857/S000523100002774-5.
8. *Скиба А.К.* Поиск в модели газовых место рождений максимальной длины их общей "полки". // *Труды МФТИ*. 2019. Т. 11, № 2(42). – С. 49-61.
9. *Skiba A.K.* Prime Cost Analysis in the Model of Gas Fields // *Optimization and applications (OPTIMA-2017): Proceedings of VIII International Conference on Optimization Methods and Applications "Optimization and Applications" (Montenegro, Petrovac, October 2017)*. – Moscow: Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, – 2016. – P. 524-530. <http://ceur-ws.org/Vol-1987/paper75.pdf>.