

DOI:

## **МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТРУКТУРНЫХ РАЗРЫВОВ И ПУЗЫРЕЙ ФИНАНСОВЫХ ИНДЕКСОВ ДЛЯ ПРОГНОЗА КРИЗИСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ<sup>1</sup>**

**Гребенюк Е. А.**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,*

*Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65*

*lgreben@ipu.ru, lngrebenuk12@yandex.ru*

*Аннотация: В докладе исследована динамика формирования структурных разрывов и пузырей финансовых индексов, определены различия рассматриваемых явлений и предложены методы их идентификации. Продемонстрировано применение разработанных методов для диагностирования кризисных явлений в экономике.*

Ключевые слова: нестационарные процессы, структурные сдвиги, финансовые пузыри, последовательное обнаружение.

### **Введение**

Возникновение и существование структурных разрывов и пузырей на финансовых рынках, сопровождающееся неблагоприятными последствиями для экономики, вызывает трудности с прогнозами будущего поведения рынка, качество которых зависит от корректной идентификации происходящих изменений. Под структурным разрывом, в соответствии с [1], будем понимать резкие изменения временного ряда в определенный момент времени. Причинами возникновения структурных сдвигов являются события внешней среды, вызывающие быструю реакцию рынка: аварии, катастрофы, принятие законодательных мер и решений, оказывающих влияние на цены и объемы, определяющие режим функционирования рынка. Под влиянием внешних воздействий возникают изменения уровня финансовых рядов, рост волатильности, нарушения связей между определенными рядами и между последовательными значениями отдельного ряда, изменения типа нестационарности рядов. В результате изменения динамики рынка прогнозирование его будущих состояний по старым моделям становится неэффективным, поэтому методам обнаружения структурных сдвигов и адаптации моделей прогнозирования в случае их обнаружения уделяется большое внимание исследователей.

Финансовый пузырь, в соответствии с определением [2], можно определить как «движение цены, очевидно, неоправданное с точки зрения информации, доступной для инвестора в текущий момент времени, которое принимает форму резкого роста с последующим столь же резким снижением». Сточки зрения эконометрического анализа «в процессе присутствует пузырь, если его значения растут или снижаются с экспоненциальной скоростью». Причинами возникновения пузырей являются финансовая нестабильность, стадное поведение инвесторов (эффект толпы), несовершенное регулирование рынка. В условиях существования пузыря переоценка финансовых активов приводит к неоправданному расширению деловой активности, сменяющейся через некоторое время инфляцией, увеличением числа банкротств и диспропорциями развития экономики. Пузыри нередко предшествуют финансовым кризисам. Своевременная идентификация пузырей дает возможность принятия превентивных мер, снижающих эффекты разрушающего влияния пузырей на экономику.

Проблема обнаружения структурных сдвигов в нестационарных временных рядах привлекает внимание исследователей, так как при наличии структурного сдвига изменяется модель процесса и, следовательно, резко ухудшается качество прогнозирования, искажаются результаты тестирования типа стационарности процесса. Своевременная идентификация пузырей дает возможность принятия превентивных мер, снижающих эффекты разрушающего влияния пузырей на экономику.

Однако большинство разрабатываемых методов обнаружения структурных сдвигов и идентификации пузырей предназначено для анализа по историческим данным, хотя для приложений интерес представляет обнаружение отклонений от стандартного поведения рынка в реальном времени. Внешне эти явления могут не слишком различаться, без учета причин, приведших к их возникновению и анализа динамики цен, невозможно осуществлять качественное прогнозирование будущего поведения рынка. Задаче обнаружения структурных разрывов и пузырей посвящено большое число работ. Однако большинство исследований связано с методами обнаружения и идентификации разрывов и пузырей по историческим данным. Алгоритмам мониторинга, определяющим наличие

---

<sup>1</sup> Работа осуществлялась в рамках комплексного проекта Минобрнауки России 10.331-17 «Моделирование и интеллектуальное управление производственными процессами в промышленности и электроэнергетике».

изменений в экономических рядах, которые могут служить предвестниками кризисных событий в экономике, в реальном времени уделяется меньше внимания. Поэтому предметом настоящей работы является разработка и исследование алгоритмов идентификации пузырей и структурных разрывов в режиме мониторинга.

## 1 Постановка задачи

### 1.1 Описание задачи

Рассматривается динамика индексов финансового рынка или макроэкономических показателей, представляющих собой нестационарные процессы, интегрированные первого порядка, в которых в некоторый неизвестный момент времени, возникают изменения одного из следующих видов:

- возникновение или изменение дрейфа процесса;
- изменение стохастического тренда процесса;
- изменение типа нестационарности процесса: переход от нестационарного к стационарному;
- возникновение финансовых пузырей.

Требуется в режиме получения наблюдений определить возникновение отклонения процесса от текущего состояния, тип этого отклонения и момент его возникновения в режиме получения новых наблюдений. Заметим, что отклонения процесса от установившегося режима могут быть как явными, так и неявными, причем последние могут быть обнаружены только специальными алгоритмами. Определение типа отклонения необходимо для того, чтобы понять, к каким последствиям может привести резкие изменения в ценах. Например, на Рис. 1 и Рис.2 представлены изменения индекса российского рынка и индекса Доу Джонс.

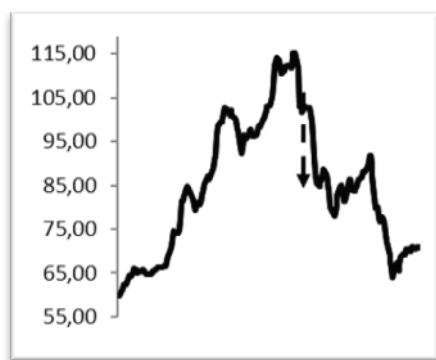


Рис. 1. Индекс АКМ

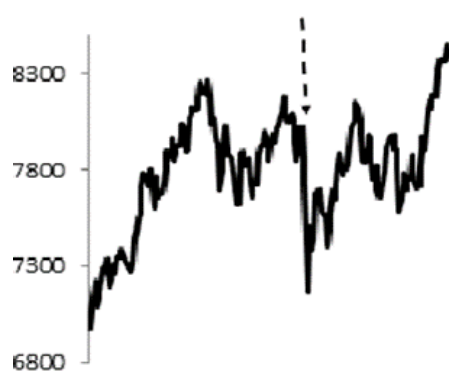


Рис. 2. Индекс Доу Джонс

На обоих графиках стрелками обозначено резкое падение цен, которое происходит одновременно. Но на левом графике это падение связано со схлопыванием финансового пузыря, предшествовавшего возникновению финансового кризиса, сопровождавшегося резким падением котировок и закончившегося в августе 1998 года дефолтом и девальвацией рубля. На правом стрелкой отмечено снижение индекса Доу Джонс на 7,18%, вызванное падением на 6% индексов на бирже Гонконга, причиной которого, в свою очередь, является азиатский финансовый кризис. Резкий скачок вниз происходит на обоих графиках одновременно, однако, если на первом графике за скачком вниз происходит схлопывание пузыря падение рынка, финансовый и экономический кризис в России, приведший к дефолту в августе 1998г., то Доу Джонс через некоторое время после падения возвращается на прежний уровень и продолжает рост.

### 1.2 Формальная постановка задачи

Пусть финансовый индекс

$$(1) \quad y_1, y_2, \dots, y_t$$

представляющий собой нестационарный процесс, интегрированный первого порядка, т. е. процесс, ряд первых разностей которого является стационарным, описывается моделью авторегрессии с дрейфом:

$$(2) \quad y_t = \mu + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t$$

где  $\alpha_i: \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ , - коэффициенты модели,  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ , случайная независимая последовательность с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

Эта модель тождественными преобразованиями может быть приведена к виду:

$$(2a) \quad \Delta y_t = \mu + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t,$$

где  $\mu, \beta_i$  - коэффициенты, полученные в результате преобразования (2) к (2a),  $\Delta y_{t-i} = y_{t-i} - y_{t-i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\varepsilon_t$ , - те же, что и в (2).

В некоторый неизвестный момент времени  $t_0$  в процессе возникают изменения одного из следующих видов:

1. Изменяется дрейф процесса, модель (2) с изменением дрейфа описывается уравнением:

$$(3) \quad y_t = \mu + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{t-i} + DT_t \mu_2 + \varepsilon_t,$$

где  $\mu_2$  - величина изменения дрейфа,  $DT_t$  определяется формулой:

$$DT_t = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \gg t_0 \end{cases}.$$

Для ряда разностей уравнение (3) имеет вид:

$$(3a) \quad \Delta y_t = \mu + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + DT_t \mu_2 + \varepsilon_t.$$

2. Изменяется дисперсия процесса, процесс с изменением описывается уравнением:

$$(4) \quad y_t = \mu + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{t-i} + v_t,$$

где

$$v_t = \begin{cases} \varepsilon_t & t < t_0 \\ \eta_t, & t \geq t_0 \end{cases}, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_2^2), \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2.$$

уравнение (4) для ряда разностей имеет вид:

$$(4a) \quad \Delta y_t = \mu + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + v_t.$$

3. Нестационарный процесс, интегрированный первого порядка, изменяется на стационарный:

$$(5) \quad y_t = \begin{cases} \mu + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t, & t < t_0 \\ \mu + \sum_{i=1}^k \alpha'_i y_{t-i} + \varepsilon_t, & t_0 \ll t \end{cases}.$$

где  $\sum_{i=1}^k \alpha'_i < 1$ ,  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ , уравнение (5) для ряда разностей имеет вид:

$$(5a) \quad \Delta y_t = \begin{cases} \mu + \sum_{i=1}^k \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t, & t < t_0 \\ \mu + \beta_0 y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t, & t_0 \ll t \end{cases}.$$

где  $\beta_0 < 0$ .

4. В процессе возникает пузырь: его значения изменяются с экспоненциальной скоростью в течение неизвестного конечного отрезка времени  $[t_0, t_1]$ . При возникновении пузыря модель (2a) принимает вид:

$$(6) \quad \Delta y_t = \mu + \frac{c}{k_t} y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{если } t > t_0,$$

где  $k_t \rightarrow \infty$ ,  $k_t/t \rightarrow 0$ ,  $c > 0$ ,  $\mu$  - константы,  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  - последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Требуется в режиме получения текущих наблюдений, определить, происходят ли в процессе (1)-(2) изменения, какой из моделей (3)-(6), может быть описан процесс после изменений, оценить момент их возникновения  $t_0$ .

## 2 Алгоритмы обнаружения структурных сдвигов и пузырей в режиме мониторинга

### 2.1 Алгоритмы последовательного обнаружения

Большое число исследований посвящено обнаружению изменений в финансовых и экономических индексах по историческим данным. Тесты, предназначенные для определения изменений в исторических данных, являются ретроспективными и могут быть использованы для анализа и изучения поведения параметров рынка в различных ситуациях. и существуют алгоритмы для определения одного разрыва с известной датой [3], одного разрыва с неизвестной датой [4], и нескольких разрывов [5-6]. В Однако для практиков большой интерес представляет оценка состояния рынка на текущий момент времени. Схема мониторинга процесса для обнаружения отклонений его от текущего состояния включает следующие шаги:

- Получение нового наблюдения  $y_t$
- Пересчет решающей функции алгоритма  $g_t = g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-k})$  с учетом нового наблюдения  $y_t$ .
- Сравнение решающей функции  $g_t$  с допустимыми границами ее изменения (порогами)  $a_t$  и  $b_t$ .
- Если решающая функция выходит за допустимые границы, то формируется сигнал об обнаружении изменений, иначе выполняется переход к шагу 1.

Ретроспективные тесты для этой процедуры не пригодны: повторное применение их к выборке, расширяющейся по мере поступления новых данных, приводит к формированию сигнала о выходе из стабильного режима в отсутствие изменений. Вероятность ошибочного отвержения нулевой гипотезы в отсутствие изменений сигнала по закону повторного логарифма приближается к единице с ростом объема выборки [7]. Методы решения задачи обнаружения структурных сдвигов в режиме мониторинга, рассматриваются в [8]. В [8] предложен флуктуационный тест для мониторинга изменений, представляющий собой модификацию известного ретроспективного теста рекурсивных оценок [9], границы  $a_t$  и  $b_t$  которых расширяются с ростом объема выборки. В настоящей работе рассматривается подход, в основе которого лежат методы последовательного анализа Вальда. Алгоритмы мониторинга для обнаружения пузырей и структурных сдвигов проверяют разные гипотезы и используют разные модели. Каждый из алгоритмов предназначен для обнаружения определенного типа изменения, поэтому для решения сформулированной в разделе 1.2 задачи предлагается использовать ансамбль алгоритмов.

### 2.2 Формирование признаков структурных сдвигов

Для обнаружения изменений 1.- 3. предлагается следующий подход. На участке процесса без изменений свойств, по ряду разностей  $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_t$  строится модель (2а) и вычисляется вектор ее оценок. Рассматривается последовательность  $Res_k, Res_{k+1}, \dots, Res_t$ , которая представляет собой результат фильтрации ряда  $\Delta y_k, \Delta y_{k+1}, \dots, \Delta y_t$  моделью (2а). С использованием обозначений:

$$(7) \quad \Delta Y_{t-k+1}^T = (1, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-k+1})$$

и

$$(8) \quad \theta^T = (\mu, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}), \quad \tilde{\theta}^T = (\tilde{\mu}, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{k-1}),$$

где  $\theta$  - вектор фактических коэффициентов модели (2а),  $\tilde{\theta}$  - вектор оценок ее коэффициентов и дрейфа, отфильтрованная последовательность:

$$(9) \quad Res_t = \Delta y_t - \tilde{\mu} - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\beta}_i \Delta y_{t-i}$$

в отсутствие изменений может быть представлена в виде:

$$(10) \quad Res_t = \theta^T \Delta Y_{t-k+1} - \tilde{\theta}^T \Delta Y_{t-k+1} + \varepsilon_t = (\theta^T - \tilde{\theta}^T) \Delta Y_{t-k+1} + \varepsilon_t.$$

Статистические характеристики последовательности (9) при рассматриваемых вариантах поведения процесса описываются следующим предложением.

**Предложение.** Условное математическое ожидание  $E((Res_t | \Delta Y_{t-k+1}))$  и условная дисперсия  $Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1})$  последовательности (9) для процесса (1), описываемого моделями (2) и (2а), при различных типах изменений удовлетворяют соотношениям:

I. Если изменения в процессе отсутствуют, то

$$E((Res_t | \Delta Y_{t-k+1})) = 0, \\ Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = \sigma_0^2 \Delta Y_{t-k+1}^T D^{-1}(\theta) \Delta Y_{t-k+1} + \sigma_0^2 / \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_0^2,$$

где  $n$  - объем выборки, по которому вычисляются оценки  $\theta, D^{-1}(\theta)$  - ковариационная матрица процесса  $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_t$ .

II. Если произошло изменение дрейфа и коэффициентов 1, то изменяется условное математическое ожидание последовательности (9), а асимптотические свойства условной дисперсии остаются без изменений:

$$E(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = \mu_2,$$

где  $\mu_2$  - то же, что (3) и (3а) после изменения,  $t \gg t_0$ ,

$$Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_0^2.$$

III. Если произошло изменение дисперсии 2), то изменяется условная дисперсия последовательности (9), а условное математическое ожидание остается постоянным:

$$E(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = 0,$$

$$Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_2^2.$$

IV. При переходе процесса от нестационарного к стационарному

$$E(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = -\mu.$$

где  $\mu$  - дрейф процесса;

$$Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + \gamma) \sigma_0^2.$$

где

$$= \frac{(\sum_{i=1}^k \alpha'_i - 1)^2 \sigma_0^2}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha'_i cov(y_t, y_{t-i})} > 0.$$

Доказательство:

Если модель авторегрессии построена по стационарному ряду, оценки ее параметров по методу наименьших квадратов - состоятельные и асимптотически нормальные [10]:

$$(11) \quad \sqrt{n}(\theta - \tilde{\theta}) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 D^{-1}(\theta)).$$

где  $\theta$  и  $\tilde{\theta}$  - векторы фактических и оцененных коэффициентов модели, соответственно;  $n$  - объем выборки, по которой получены оценки  $D^{-1}(\theta)$  - ковариационная матрица процесса,  $T$  - знак транспонирования,  $\sigma_\varepsilon^2$  - дисперсия процесса. Доказательство первого пункта Предложения непосредственно следует из (10) и (11):

$$E(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = E((\theta^T - \tilde{\theta}^T) \Delta Y_{t-k+1} + \varepsilon_t | \Delta Y_{t-k+1}) = 0.$$

$$Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = Var((\theta^T - \tilde{\theta}^T) Y_{t-k+1} + \varepsilon_t | \Delta Y_{t-k+1}) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}} \Delta Y_{t-k+1}^T D^{-1}(\theta) \Delta Y_{t-k+1} + \sigma_0^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_0^2.$$

После изменения дрейфа I. вектор фактических значений параметров процесса разностей равен:

$$\theta_1^T = (\mu + \mu_2, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}),$$

тогда при  $t \gg t_0$

$$Res_t = (\theta_1^T - \tilde{\theta}^T) \Delta Y_{t-k+1} + \varepsilon_t = (\mu - \tilde{\mu}) + \mu_2 + \sum_{i=1}^{k-1} (\beta_i - \tilde{\beta}_i) \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t,$$

где  $\theta$  и  $\tilde{\theta}$  описываются в (8),  $\mu_2$  - величина изменения дрейфа,

$$E(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = \mu_2,$$

$$Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = Var((\theta_1^T - \tilde{\theta}^T) Y_{t-k+1} + \varepsilon_t | \Delta Y_{t-k+1}) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}} \Delta Y_{t-k+1}^T D^{-1}(\theta_1) \Delta Y_{t-k+1} + \sigma_0^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_0^2.$$

После изменения дисперсии III. изменяется только условная дисперсия, статистика (9) имеет вид:

$$Res_t = (\theta_1^T - \tilde{\theta}^T) \Delta Y_{t-k+1} + \eta_t.$$

$$Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = Var((\theta^T - \tilde{\theta}^T) Y_{t-k+1} + \eta_t | \Delta Y_{t-k+1}) =$$

$$= \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{n}} \Delta Y_{t-k+1}^T D^{-1}(\theta) \Delta Y_{t-k+1} + \sigma_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_2^2.$$

В случае изменений IV, после перехода процесса от нестационарного к стационарному вектор фактических значений параметров процесса разностей равен:

$$\theta_2^T = (\mu, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}),$$

а уравнение процесса в разностях может быть записано в виде:

$$\Delta y_t = \mu + \beta_0 y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t.$$

Статистика (9) имеет вид:

$$(12) \quad Res_t = (\theta_2^T - \tilde{\theta}^T) \Delta Y_{t-k+1} + \beta_0 y_{t-1} + \varepsilon_t = (\mu - \tilde{\mu}) + \sum_{i=1}^{k-1} (\beta_i - \tilde{\beta}_i) \Delta y_{t-i} + \beta_0 y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Найдем математическое ожидание стационарного процесса  $y_t$ , удовлетворяющего уравнению (5), на интервале  $t \gg t_0$ :

$$(13) \quad E(y_t) = E(\mu + \sum_{i=1}^k \alpha'_i y_{t-i} + \varepsilon_t) \Rightarrow E(y_t) = \mu + E(y_t) \sum_{i=1}^k \alpha'_i E(y_t) = \frac{\mu}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha'_i}.$$

Откуда получаем

$$E(y_t) = \frac{\mu}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha'_i}, \text{ где } \sum_{i=1}^k \alpha'_i < 1.$$

С учетом (12) и (13), получаем

$$E(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = \frac{\mu(\sum_{i=1}^k \alpha'_i - 1)}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha'_i} = -\mu.$$

Найдем дисперсию  $y_t$ :

$$Var(y_t) = Var(\mu + \sum_{i=1}^k \alpha'_i y_{t-i} + \varepsilon_t) \Rightarrow \frac{\sigma_0^2}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha'_i cov(y_t, y_{t-i})}.$$

Условная дисперсия  $y_t$  равна:

$$Var(Res_t | \Delta Y_{t-k+1}) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{n}} \Delta Y_{t-k+1}^T D^{-1}(\theta_1) \Delta Y_{t-k+1} + \frac{(\sum_{i=1}^k \alpha'_i - 1)^2 \sigma_0^2}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha'_i cov(y_t, y_{t-i})} + \sigma_0^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + \gamma) \sigma_0^2$$

$$\text{где } \gamma = \frac{(\sum_{i=1}^k \alpha'_i - 1)^2 \sigma_0^2}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha'_i cov(y_t, y_{t-i})} > 0.$$

ч. т. д

Статистические характеристики последовательности (9) при различных структурных сдвигах в процессе приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Изменение статистических характеристик последовательности (9)

Тип изменения	Условное математическое ожидание	Количество посетителей
Начальное состояние на участке без изменений	0	$\sigma_0^2$
Изменение коэффициентов и тренда	$\mu_2 \neq 0$	$\sigma_0^2$
Изменение дисперсии	0	$\sigma_2^2 \neq \sigma_0^2$
Переход к стационарному процессу	$-\mu$ Изменяется в направлении противоположном направлению тренда	$(1 + \gamma) \sigma_0^2$ , где $\gamma > 0$ - увеличение дисперсии

Оценки, приведенные в Таблице 1, помогают определить случившийся сдвиг: уменьшение среднего в направлении, противоположном направлению текущего тренда при росте дисперсии указывает на переход процесса к стационарному состоянию изменение среднего при постоянной

дисперсии – на изменение дрейфа, нулевое среднее при изменении дисперсии – на изменение дисперсии.

### 2.3 Обнаружение структурных сдвигов

Для обнаружения изменений математического ожидания и дисперсии последовательности (10) применяется алгоритм кумулятивных сумм Пейджа [11]. Алгоритм основан на применении последовательного критерия отношения вероятностей (ПКОВ) Вальда [12] для проверки простой гипотезы  $H_0 : \omega = \omega_1$ , против альтернативной гипотезы  $H_1 : \omega = \omega_2$ , к последовательности наблюдений  $y_1, y_2, \dots, y_t \dots$ . При получении нового значения этой последовательности выполняется проверка: удовлетворяет ли статистика отношения правдоподобия (ОП)  $s_1^t$ , вычисляемая по формуле:

$$s_1^t = \sum_{i=1}^t \ln \frac{f_{\omega_2}(y_i)}{f_{\omega_1}(y_i)},$$

где  $f_{\omega_1}(y_t), f_{\omega_2}(y_t)$  - плотности распределения случайной последовательности наблюдений с параметрами  $\omega_1, \omega_2$  до и после изменения свойств, соответственно, условию:

$$h_d < s_1^t < h_u,$$

где  $h_d, h_u$  – нижний и верхний пороги алгоритма ПКОВ. Основная идея алгоритма Пейджа заключается в использовании нулевого значения в качестве нижнего порога и возобновлении алгоритма всякий раз, когда решающая функция достигает нижнего порога. Решающая функция алгоритма  $g_t$  имеет вид:

$$g_t = \max(0, g_{t-1} + s_{t-1}^t), \quad t > 0, \quad g_0 = 0.$$

где

$$s_{t-1}^t = \ln \frac{f_{\omega_2}(y_t)}{f_{\omega_1}(y_t)},$$

- приращение решающей функции. При превышении решающей функцией верхнего порога алгоритм подает сигнал об изменении. В условиях точно известных параметров до и после изменения свойств алгоритм Пейджа является оптимальным: он обладает минимальным запаздыванием в обнаружении при заданном ограничении на процент ложных обнаружений.

Алгоритм обнаружения и определения типов структурных сдвигов включает параллельное применение двух наборов алгоритмов Пейджа: один для обнаружения изменений среднего, другой – для обнаружения изменений дисперсии. Алгоритмы в наборах различаются выбором настроечных параметров. Алгоритм обнаружения изменений дрейфа проверяет два варианта изменения дрейфа (увеличение и уменьшение): от  $\tilde{\mu}$  до  $\tilde{\mu} + \Delta_1, \tilde{\mu} - \Delta_1$ , где  $\Delta_1 > 0$ . Для каждой пары параметров  $\omega_1, \omega_2$  вычисляется решающая функция и определяются пороги. Алгоритм обнаружения изменений дисперсии проверяет те же варианты изменения дисперсии от  $\tilde{\sigma}_0^2$  до  $\tilde{\sigma}_0^2 + \Delta_1, \tilde{\sigma}_0^2 - \Delta_1$ , где  $\Delta_1 > 0$ . Алгоритм обнаружения типа нестационарности процесса проверяет изменение условного математического ожидания в направлении, противоположном направлению дрейфа: от  $\tilde{\mu}$  до  $-\tilde{\mu}$  и увеличение дисперсии от  $\tilde{\sigma}_0^2$  до  $\tilde{\sigma}_0^2 + \Delta_1$ . Если дрейф на стабильном участке отсутствует, то для определения типа изменения необходимо провести проверку процесса на наличие единичного корня.

Процесс обнаружения включает следующие шаги.

Шаг 1. На стабильном участке, не содержащим изменений, по ряду разностей  $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_t$  строится модель (2а), оцениваются ее дисперсия и дрейф и определяются условное математическое ожидание и дисперсия последовательности (9) в отсутствие изменений свойств.

Шаг 2. При получении очередного наблюдения  $y_t$  вычисляется значение последовательности  $Res_t$  по формуле (9) и выполняется проверка изменений ее условного математического ожидания и условной дисперсии. Порог выбирается по результатам проверки работы алгоритма на участке, не содержащим изменений: решающая функция на этом участке не должна превышать порога.

Шаг.3. При превышении алгоритмом в каком-либо из наборов порога, делается вывод о наличии изменения свойств соответствующего типа.

### 3 Алгоритмы обнаружения пузырей в режиме мониторинга

Проведенные в последнее десятилетие эмпирические исследования [13] подтвердили гипотезу, что возникновение пузыря связано с изменением степени нестационарности процесса: процесс, интегрированный порядка  $p$ , изменяет свои свойства, и становится «взрывным», возникает пузырь. И наоборот, если пузырь «схлопывается», то процесс изменяется: от взрывного процесса к интегрированному или стационарному процессу.

Впервые подход к построению тестов для мониторинга был предложен в работах Филлипса с соавторами в работе [13], в работах [14] Хомма и Брейтунга и Брейтунга и Круса [15]. Однако, среди настроечных параметров этих алгоритмов важное место занимают критические значения, области принятия используемой в нем нулевой гипотезы, которые зависят от длительности интервала мониторинга, поэтому для эффективной настройки алгоритмов предполагаемая длительность мониторинга должна быть известна заранее. Это ограничение создает определенные трудности при их реализации. В работах [16-17] был предложен алгоритм, настроечные параметры которого не привязаны к интервалу, на котором применяется мониторинг. Алгоритм SECCORR основан на применении статистики отношения правдоподобия плотностей распределения коэффициента корреляции между исходным процессом (1) и его разностями. Как показали проведенные нами исследования, в случае процессов, интегрированных первого порядка, корреляция между  $y_{t-1}$  и  $\Delta y_t$  - отрицательная. При возникновении пузыря в модели ряда разностей (6) появляется дополнительный член  $\frac{c}{k_t} y_{t-1}$ , который изменяет значение коэффициента корреляции между  $y_{t-1}$  и  $\Delta y_t$ , рассчитываемого в скользящем окне, на значение, приближающееся к единице. Проведенный методами статистического моделирования сравнительный анализ [17] алгоритма, SECCORR с алгоритмами [13-15] показал, что алгоритм SECCORR,

- по критериям среднее запаздывание и число ложных обнаружений превосходит рассмотренные алгоритмы, рассмотренные в [13-15];
- обладает наименьшей чувствительностью к изменению объемов мониторинга при постоянных настроечных параметрах.

## Литература

1. Hansen, B. E. The New Econometrics of Structural Change: Dating Breaks in U.S. Labor Productivity// Journal of Economic Perspectives. Vol.15. 2001, № 4. –P. 117–128.
2. Blanchard, O. J., Watson, M. W., Bubbles, rational expectations and financial markets// National Bureau of economic research Cambridge, Mass., USA. 1983.
3. Chow G.C. Tests of equality between sets of coefficients in two linear regression// Econometrica. Vol.26.,1960, №3. P.591-605.
4. Quandt R.E. Tests of the Hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes// Journal of the American Statistical Association, Vol.55. 1960.
5. Leybourne, S.J., Kim, T. and Taylor, A.M.R. (2007), “Detecting multiple changes in persistence,” Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics Vol. 11. 2007, №3.
6. Kejriwal M., P. Perron P. and Zhou J., Wald tests for detecting multiple structural changes in persistence//Econometric Theory, Vol. 29, 2013, №2 P. 289-323.
7. Robbins H. Statistical Methods Related to the Law of the Iterated Logarithm// The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 41, 1970., No. 5., P. 1397-1409.
8. Chu C.S.J., Stinchcombe M., White H. Monitoring Structural Change//Econometrica, Vol. 64, 1996., No. 5. , 1996), P. 1045-1065.
9. Krämer W., Ploberger W., Alt R., Testing for Structural Change in Dynamic Models // Econometrica, Vol. 56, 1998, No. 6, P. 1355-1369.
10. Mann H. B., Wald A. On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. - Econometrica, Vol.11, 1943., P.173-220.
11. Page E.S. Continuous inspection schemes, Biometrika. – Vol. 41., 1954, No 1-2., P. 100–115
12. Вальд. Последовательный анализ. М. Физматлит. 1960. – С.328.
13. Phillips, P. C. B., Shi S.P and Yu J. Testing for multiple bubbles: historical episodes of exuberance and collapse in the S&P 500// International economic review. Vol. 56, 2015, N 4., P.1043-1077.
14. Hogg U., Breithing J., Testing for Speculative Bubbles in Stock Markets: A Comparison of Alternative Methods// Journal of Financial Econometrics, 2012, Vol. 10, No. 1, 198–231
15. Breitung J., Kruse R., When bubbles burst: econometric tests based on structural breaks //Stat Papers. 54, 2013., 911-930/
16. Гребенюк Е. А., Малинкина А.В. Применение методов эконометрического анализа данных для идентификации и датирования «пузырей» на финансовых рынках//Проблемы управления. – 2014. – N 5. – С. 50-58.
17. Гребенюк Е. А., Малинкина А.В. Сравнение методов эконометрического анализа данных для идентификации финансовых пузырей //Проблемы управления. –2017. – N 4. – С. 17-25.