DOI:

О РЕШЕНИИ МАТРИЧНЫХ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ядыкин И.Б., Галяев И.А.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

Jad@ipu.ru

Аннотация: Доклад развивает известный метод решения обобщенных уравнений Ляпунова для непрерывных билинейных динамических систем, который можно применить для класса нестационарных линейных системс переменой матрицей динамики и постоянными матрицами входов и выходов.

Ключевые слова: спектральные разложения, обобщенное уравнение Ляпунова, нестационарные системы, итеративные алгоритмы, матричные уравнения Вольтерра

Введение

Матричное уравнение Ляпунова играет важную роль в теории управления. Достаточно отметить такие области его применения как моделирование систем высокой размерности, энергосберегающее управление, построение наблюдателей состояния, модальное управление [1-5].За последние годы вырос интерес к исследованию свойств этого уравнения связанных с задачами оптимизации и управления с применением билинейных моделей объектов управления[6-8]. Билинейные динамические системы являются наиболее близким к линейным классом нелинейных систем, для которых могут применяться методы анализа и синтеза линейных систем. Для исследования устойчивости билинейных систем применяются обобщенные матричные уравнения Вольтерра и многомерное преобразование Лапласа [9-10].Целью настоящей работы является найти решение обобщенного уравнения Ляпунова ОУЛ для непрерывных линейных динамических систем с переменной матрицей динамики в виде суммы матриц, одна из которых относится к линейной части модели, а другие формируют поправки к решению линейной части. Разработанный ранее итеративный метод решения дает решение ОУЛ на основе метода векторизации и тензорной алгебры, но не использует спектральных разложений решения.

1 Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную билинейную динамическую систему с многими входами и многими выходами

$$(1)\quad \Sigma_2 : \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum\limits_{\gamma=1}^{m} N_\gamma x(t) u_\gamma(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^m.$

Определим линейную стационарную часть системы в виде

$$\Sigma_1 : \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax(t) + +Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

Определим грамиан управляемости билинейной системы с помощью матричного ряда Вольтерра вида[10].

$$P_1(t_1) = e^{At_1}B,$$
$$P_i(t_1,\dots t_i) = e^{At_i}\left[N_1P_{i-1}\ N_2P_{i-1}\ \dots .N_mP_{i-1}\right],\quad i = 2,3,4\dots .$$
$$(2)\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty} P_i(t_1,\dots t_i)P_i^{\mathrm{T}}(t_1,\dots t_i).$$

Для системы (1) можно определить обобщенное уравнение Ляпунова ОУЛ в виде

$$(3)\qquad A\tilde{P}_i + \tilde{P}_iA^{\mathrm{T}} + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma\tilde{P}_{i-1}N_\gamma^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} = 0.$$

Ряд Вольтерра (2) является решением уравнения (3).

Теорема 1 [11]. Если матрица динамики линейной части A устойчива, а грамиан управляемости билинейной системы является единственным решением обобщенного уравнения Ляпунова, тогда решение является матрицей, определяемой с помощью следующей итеративной процедуры

$$A\tilde{P}_1 + \tilde{P}_1A^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} + 0,$$
$$(4)\qquad A\tilde{P}_i + \tilde{P}_iA^{\mathrm{T}} + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma\tilde{P}_{i-1}N_\gamma^{\mathrm{T}} = 0,\quad i = 2,3,4\dots ..$$
$$P = \tilde{P}_1 + \sum_{i=2}^{\infty}\tilde{P}_i.$$

Следуя [10] рассмотрим задачу вычисления грамиана управляемости для одного класса линейных нестационарных систем вида

$$(5)\qquad \Sigma_3:\begin{cases}\dot{x}(t) = \left[A + \sum\limits_{\gamma=1}^{H} A_\gamma f_\gamma(t)\right]x(t) + Bu(t),\\ y(t) = Cx(t),\end{cases}$$

где $x \in R^n, u \in R^m, y(t) \in R^q, f_\gamma \in R^1, \gamma = 1,2,\dots H$ Матрица динамики билинейной системы является суммой постоянной матрицы A и суммы произведений постоянных матриц A_γ на переменные параметры $f_\gamma(t)$, которые в отличие от координатных входов $u_i(t)$ можно назвать параметрическими входами. Система $\sum_3$ может быть преобразована в систему $\sum_2$ путем расширения вектора управления и введения новых обозначений

$$u_\eta^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_m\ f_1\dots\dots f_H\end{bmatrix},\quad B_{bl} = \begin{bmatrix}B\ 0_{nxH}\end{bmatrix},$$
$$(6)\qquad N_\eta = \begin{cases}0_{nxn},\quad \eta = 1,2,\dots m,\\ A_\eta,\quad \eta = m+1, m+2,\dots\dots m+H,\end{cases}$$
$$\Sigma_{bl}:\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum\limits_{\eta=1}^{m+H} N_\eta x(t)u_\eta(t) + B_{bl}u(t),\\ y(t) = Cx(t),\end{cases}$$

Грамиан управляемости (2) системы (6) удовлетворяет расширенному уравнению Ляпунова вида (3) и может быть вычислен с помощью итеративной процедуры (4).В работе [10] была получена также верхняя оценка индуцированной нормы Фробениуса грамиана управляемости билинейной системы

$$(7)\qquad \left\|P_{bl}\right\|_{\bullet} \le \frac{c^2\left\|B_{bl}B_{bl}^{\mathrm{T}}\right\|_{\bullet}}{\mu - \zeta^2c^2},$$

где c и μ -оценки величины и скорости убывания матричной экспоненты, а ζ– нормы суммы произведений матриц нелинейностей $\left\|e^{\mathbf{A}t}\right\| \le ce^{-\mu t/2}, t \ge 0, \quad \zeta = \left\|\sum_{\eta=1}^{n_u+H} N_\eta N_\eta^{\mathrm{T}}\right\|^{1/2}$. В работе доказано, что грамиан управляемости системы $\sum_{bl}$ существует если выполнены условия

1.матрица A устойчива.

2.Выполнено неравенство $\zeta < c^{-1}\sqrt{\mu}$.

Эти результата раздела являются отправной точкой настоящей работы. Целью работы является получение итеративного спектрального разложения решения обобщенного уравнения Ляпунова вида (3), или , что то же самое, решения матричного уравнения Вольтерра с ядрами вида интеграла свертки.

2 Основные результаты

2.1.Сепарабельные спектральные разложения грамианов управляемости билинейной системы.

В работе [6] было получено следующее спектральные разложения грамианов линейной части билинейной системы по простому спектру матрицы *A* при предположениях, что матрица устойчива, и все ее собственные числа различны

$$P^l = -\sum_{r=1}^{n}(Is_r + A^*)^{-1} Q \operatorname{Res}((Is_r - A)^{-1}, s_r)$$

Если все собственные числа матрицы A попарно различны, то линейную часть можно привести к диагональному виду с помощью преобразования координат [4].

$$x_d = Tx, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \; y_d = C_d x_d,$$
$$A_d = TAT^{-1}, \; B_d = TB, \; C_d = CT^{-1}, \; Q_d = TBB^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}.,$$

или

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \\ v_n^* \end{bmatrix} = T^{-1} A_d T,$$

где матрица T^{-1} составлена из правых собственных векторов u_i, а матрица T - из левых собственных векторов v_i^*, соответствующих собственному числу s_i. Грамиан диагонализованной линейной части является решением уравнения Ляпунова вида

$$A_d P_d + P_d A_d^* = -Q_d,$$

которое определится из формулы [6]

$$(8) \qquad P_d^l = -\sum_{r=1}^{n}(Is_r + A_d^*)^{-1} Q_d \operatorname{Re}s((Is_r - A_d)^{-1}, s_r)$$

Грамиан управляемости P_d^l связан с грамианом P^l соотношением вида

$$P^l = T^{-1} P_d^l (T^{-1})^{\mathrm{T}}, T^{-1} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в диагонализованной линейной части матрица Q_d зависит не только матрицы *B*, как в исходной системе, но и от собственных чисел матрицы *A***.** Произведение первых двух сомножителей в (8) образует матрицу вида

$$-(Is_r + A_d^*)^{-1} Q_d = -\begin{bmatrix} (s_1^* + s_r)^{-1} q_{11}^d & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{12}^d & \dots & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{1n}^d \\ (s_2^* + s_r)^{-1} q_{21}^d & (s_2^* + s_r)^{-1} q_{12}^d & \dots & (s_2^* + s_r)^{-1} q_{2n}^d \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ (s_n^* + s_r)^{-1} q_{n1}^d & (s_n^* + s_r)^{-1} q_{n2}^d & \dots & (s_n^* + s_r)^{-1} q_{nn}^d \end{bmatrix},$$

Введем новое обозначение 1_{ij} для матрицы, все элементы которой равны нулю за исключением элемента «ij», который равен единице. Для диагональной матрицы *A* справедливы соотношения

$$(Is - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} R_i (s - s_i)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} 1_{ii} (s - s_i)^{-1}, \quad \text{Res}((Is - A)^{-1}, s_i) = R_i = 1_{ii}.$$

Заметим, что матрица R_i обладает замечательным свойством: умножение любой квадратной матрицы на нее справа вырезает из первой «i» - ый столбец, а умножение этой матрицы на нее слева вырезает из первой «i» - ую строку. При этом все пустые места заполняются нулями. Применим это свойство при умножении матрицы $-(Is_r + A_d^*)^{-1} Q_d$ на матрицу 1_{ii} справа. Введем обозначение

$$\left[p_r^l \right]_0 \square \begin{bmatrix} & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{1r}^d & \\ & (s_2^* + s_r)^{-1} q_{2r}^d & \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 \\ & (s_n^* + s_r)^{-1} q_{nr}^d & \end{bmatrix}, (p_r^l)^{\mathrm{T}} = \left[(s_1^* + s_r)^{-1} q_{1r}^d \quad \dots. \quad \dots \quad (s_n^* + s_r)^{-1} q_{nr}^d \right].$$

Это позволяет записать формулу в компактном виде

$$(9) \qquad P_d^l = \left[p_1^l \right]_0 \oplus \left[p_2^l \right]_0 \oplus \dots. \oplus \left[p_n^l \right]_0$$

Назовем разложение вида (9) *сепарабельным* спектральным разложением грамиана линейной части билинейной системы в виде прямой суммы субграмианов, соответствующих разложению грамиана управляемости линейной части по простому спектру матрицы динамики. При этом каждый субграмиан представляет собой матрицу из нулей, в которой только один столбец представляет собой вектор p_1^l. Для практических приложений это означает возможность вычислять отдельные субграмианы доминантных мод, не вычисляя весь грамиан. Кроме того, мы видим, что каждый элемент вектора p_r^l субграмиана обратно пропорционален комбинации собственного числа «r» матрицы динамики с другими ее собственными числами. Это наблюдение позволяет предположить, что парные комбинации собственных чисел играют важную роль в формировании сепарабельного разложения грамиана. Рассмотрим спектральное разложение грамиана линейной части билинейной системы по парному комбинационному спектру матрицы *A*. В соответствии с [6] оно имеет вид

$$P_d^l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{dij}^l,$$

$$(10) \qquad P_{dij}^l = \left(\frac{-1}{s_i + s_j} \right) \text{Res}((Is_i - A_d)^{-1}, s_i) Q_d \, \text{Res}((Is_j - A_d)^{-1}, s_j).$$

Учитывая равенства (8), и тот факт, что умножение матрицы Q_d на матрицу $\mathbf{1}_{ii}$ слева и на матрицу $\mathbf{1}_{jj}$ справа вырезает из нее элемент, стоящий на пересечении столбца «i» строки «j» и равный числу $(s_i + s_j)^{-1} q_{ij}^d$, формулу (10) можно переписать в виде

$$P_d^l = \sum_{i,j} \oplus P_{dij}^l,$$

$$P_{dij}^l = \left(\frac{-1}{s_i + s_j} \right) 1_{ii} Q_d 1_{ii}, P_{dij}^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ..0.. & 0 \\ 0 & 0 & ..0.. & 0 \\ 0 & 0 & ..(s_i + s_j)^{-1} q_{ij}^d .. & 0 \\ 0 & 0 & ..0.. & 0 \end{bmatrix}.$$

Это простая и компактная формула сводит вычисление матрицы комбинационного субграмиана линейной части к вычислению только одного его элемента. Она проще формулы (9) вычисления матрицы субграмиана разложения по простому спектру. Мы получили *сепарабельное* спектральное разложение грамианов линейной части билинейной системы в виде прямой суммы n^2 субграмианов, соответствующих разложению грамиана управляемости по парному комбинационному спектру матрицы динамики.

2.2.Сепарабльные спектральные разложения субграмианов билинейных систем.

Перейдем далее к рассмотрению спектральных разложений грамиана билинейной системы. На каждом шаге итераций в (4) происходит решение матричного уравнения Ляпунова. Левая часть уравнения совпадает с левой частью такого же уравнения линейной части, а правая часть $\sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma \tilde{P}_{i-1} N_\gamma^{\mathrm{T}}$ меняется на каждом шаге. Применим к матрице $\tilde{P}_{i-1}$ спектральное разложение по парному комбинационному спектру матрицы динамики.Без ограничения общности предположим, что правая часть (4) принята равной единственному слагаемому $N_\gamma \tilde{P}_{i-1} N_\gamma^{\mathrm{T}}$.

$$P_d^{bl,k} = \sum_{i,j} \oplus P_{dij}^{bl,,k-1},$$

$$P_{dij}^{bl,k} = \left(\frac{-1}{s_i + s_j} \right) 1_{ii} P_{dij}^{bl,k-1} 1_{ii}, P_{dij}^{bl,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ..0.. & 0 \\ 0 & 0 & ..0.. & 0 \\ 0 & 0 & ..(s_i + s_j)^{-1} p_{dij}^{bl,k-1} .. & 0 \\ 0 & 0 & ..0.. & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формирование матричного произведения $N_\gamma 1_{ij} N_\gamma^{\mathrm{T}}$.При умножении матрицы N_γ на матрицу $\mathbf{1}_{ij}$ справа получим матрицу, все элементы которой, кроме столбца «j», равны нулю, а столбец «*j*» имеет вид

$$\left[col"j" \right]^{\mathrm{T}} = \left[n^\gamma{}_{1i} \quad n^\gamma{}_{2i} \quad ..n^\gamma{}_{ii}.. \quad n^\gamma{}_{ni} \right]$$

При этом элемент «ν» столбца равен $n_{\nu i}^\gamma$.Этот элемент войдет в произведение, стоящее на месте «νμ» произведения матриц $N_\gamma 1_{ij} N_\gamma^{\mathrm{T}}$.При умножении матрицы$1_{ij}$ на матрицу N_γ^{T} справа получим матрицу, все элементы которой, кроме строки «i», равны нулю, а строка «i», имеет вид

$$\left[row"i" \right] = \left[n^\gamma{}_{1j} \quad n^\gamma{}_{2j} \quad ..n^\gamma{}_{jj}.. \quad n^\gamma{}_{nj} \right]$$

При этом элемент «μ» строки равен $n_{\mu j}^\gamma$. Этот элемент войдет в произведение, стоящее на месте «νμ» произведения матриц $N_\gamma 1_{ij} N_\gamma^{\mathrm{T}}$. Отсюда следует

$$(11) \qquad N_\gamma 1_{ij} N_\gamma^{\mathrm{T}} p^{(k-1),ij} = \left[\alpha_{\nu\mu} \right], \alpha_{\nu\mu} = n_{\nu i}^\gamma n_{\mu j}^\gamma p^{(k-1),ij}.$$

Заметим, что умножение любой матрицы на матрицу R_i слева, а затем на матрицу R_j справа соответствует удалению всех элементов матрицы, кроме элемента «*ij*», который остается без изменения. Тогда элемент «$\nu\mu$» правой части уравнения (4) с учетом (14)) можно представить в виде

$$(12)\qquad P^{(k)ij\gamma} = \sum_{\nu,\mu}\left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*}\right)1_{\nu\mu}\, n_{\nu i}^{\gamma} n_{\mu j}^{\gamma}\, p_{\nu\mu}^{(k-1)ij}, \quad k = 2,3,\ldots\infty.$$

Формула (12) показывает, что структура матрицы грамиана «наследуется» на каждом шаге итераций, начиная с шага «k=2», что эквивалентно равенству

$$P^{(k)ij\gamma} = \left(\frac{-1}{s_1 + s_1^*}\right)1_{11}\, n^{\gamma}_{1i} n^{\gamma}_{1j}\, p^{(k-1)11} \oplus..\oplus \left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*}\right)1_{\nu\mu}\, n^{\gamma}_{\nu i} n^{\gamma}_{\mu j}\, p_{\nu\mu}^{(k-1)\nu\mu} \oplus\ldots\oplus \left(\frac{-1}{s_n + s_n^*}\right)1_{nn}\, n^{\gamma}_{ni} n^{\gamma}_{nj}\, p_{nn}^{(k-1)nn}, \quad k = 2,3,\ldots\infty$$

Анализ формулы (12) позволяет разбить множество элементов матрицы субграмиана $p_{ij}^{(k)}$

на три подмножества:

подмножество *ведущих* элементов:

$$(13)\quad \left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*}\right)\mathbf{1}_{\nu\mu}\, n_{\nu i}^{\gamma} n_{\mu j}^{\gamma}\, p_{ij}^{(k-1)ij\gamma} = \left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*}\right)\mathbf{1}_{\nu\mu}\, n_{\nu\nu}^{\chi} n_{\mu\mu}^{\gamma}\, p_{ij}^{(k-1)ij\gamma}, i, j,\nu,\mu = 1,2\ldots n; \gamma = 1,2\ldots m;, \quad \pi{=}i, \rho{=}j,$$

подмножество *ведомых* элементов:

$$(14)\quad \left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*}\right)\mathbf{1}_{\nu\mu}\, n_{\nu i}^{\gamma} n_{\mu j}^{\gamma}\, p_{\nu\mu}^{(k-1)ij\gamma}, \quad i,j,\nu,\mu{=}1,2\ldots n;\ \ \eta{=}1,2\ldots m;\ \nu{=}i,\mu{\neq}j;\ \nu{\neq}i,\mu{=}j;\ \nu{\neq}i,\ \mu{\neq}j$$

подмножество *нулевых* элементов: $p_{ij}^{(k)} = 0, \quad k = 1,2,\ldots\infty.$

Важно отметить, что если спектр матрицы A известен, то каждый субграмиан вычисляется *независимо* от любого другого. Алгоритм итеративного вычисления элемента «$\nu\mu$» субграмиана «*ij*» следует из (12)

$$(15)\qquad p_{ij\gamma}^{bl(k)ij\gamma} = \sum_{\substack{\pi,\rho\\ \pi=i,\rho=j}} q_{ij\gamma}\, p_{\pi\rho\gamma}^{bl(k-1)\pi\rho\gamma}, \qquad i, j,\nu,\mu = 1,2\ldots n; \gamma = 1,2\ldots m;\ \pi{=}i,\rho{=}j,$$

$$p_{\nu\mu\gamma}^{bl(k)ij\gamma} = \sum_{\substack{\pi,\rho\\ \pi=i,\rho=j}} p_{\pi\rho\gamma}^{bl(k-1)\pi\rho\gamma}\left[\left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*}\right)n_{\nu i}^{\gamma} n_{\mu j}^{\gamma}\right], \qquad i,j,\nu,\mu{=}1,2\ldots n; \gamma{=}1,2\ldots m;\ \nu{=}i,\mu{\neq}j; \nu{\neq}i,\mu{=}j;\ \nu{\neq}i,\mu{\neq}j$$

Из формул (14) следует тождество

$$(16)\qquad p_{\nu\mu}^{(k)ij\gamma} \equiv \left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*}\right)n_{\nu i}^{\gamma} n_{\mu j}^{\gamma}\, p^{(k-1)ij\gamma}, \quad k{=}2,3,..N_{end}.\ \ \forall\,\nu,\mu = 1,2,\ldots n.\ \ \forall i, j = 1,2,\ldots n.$$

Получен новый алгоритм вычисления ядер ряда Вольтерра, основанный на диагонализации матрицы динамики и применении метода грамианов на каждом шаге итерации. Для ведущих элементов матрицы субграмиана «*ij*» эта формула принимает вид

$$(17)\qquad p_{ij}^{(k)ij\gamma} \equiv \left(\frac{-1}{s_i + s_j^*}\right)n_{ii}^{\gamma} n_{jj}^{\gamma}\, p^{(k-1)ij\gamma}, \quad k{=}2,3,..N_{end}.\ \ \forall i = 1,2,\ldots n.\ \ \forall j = 1,2,\ldots n.$$

Формула (17) означает, что последовательность ведущих элементов матрицы субграмиана «*ij*» образует геометрическую прогрессию со знаменателем

$$(18) \qquad q_{ij\gamma} = \left(\frac{-1}{s_i + s_j^*} \right) n_{ii}^{\gamma} n_{jj}^{\gamma},$$

и начальным членом p_{ij}^{l}.

В дальнейшем считается выполненным предположение об ограниченности вектора $u(t)$, поскольку в противном случае нарушаются условия BIBO (bounded input bounded output) устойчивости билинейной системы [10]:

$$(19) \qquad \|u(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|^2} < M, \quad M > 0.$$

Кроме того, если система устойчива, то существуют такие положительные числа α и β что

$$0 < \alpha \le -\max_i \operatorname{Re}\left[\lambda_i(A)\right], \beta > 0 \quad \Rightarrow \left\| e^{\mathbf{A}t} \right\| \le \beta e^{-\alpha t}.$$

Предположим, что $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} \left\| \mathbf{N}_k \right\|$ Тогда ограничение (21) выполняется, если $\Gamma < \dfrac{\alpha}{M\beta}$.

2.2.Сепарабельные спектральные разложения грамианов линейных систем с переменной матрицей динамики.

Т е о р е м а 2. [9]:

1.Пусть матрица А устойчива, имеет простой спектр.

2.Пусть вектор $u(t)$ ограничен по норме

$$\|u(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|^2} < M_u, \quad M_u > 0.$$

3.Пусть существуют такие положительные числа α , β и Γ, что выполнены неравенства

$$0 < \alpha \le -\max_i \operatorname{Re}\left[\lambda_i(A)\right], \beta > 0 \quad \Rightarrow \left\| e^{\mathbf{A}t} \right\| \le \beta e^{-\alpha t}.$$

$$(20) \qquad \Gamma < \frac{\alpha}{M\beta}. \, где \; \Gamma = \sum_{\gamma=1}^{H} \left\| A_\gamma A_\gamma^{\mathrm{T}} \right\|.$$

4.Пусть справедливы неравенства

$$(21) \qquad \max_{i,j} \left| s_i + s_j \right|^{-1} \times \max_{i,j,\nu,\mu,\gamma} \left| a_{\nu i,\gamma} a_{\mu j,\gamma} \right| < 1, \quad \forall i, j, \nu, \mu = 1,...n; \forall \gamma = 1,...H.$$

Тогда решение обобщенного уравнения Ляпунова (3) существует, единственно и является грамианом управляемости линейной нестационарной системы (5). Элементы матрицы решения могут быть определены с помощью итеративной процедуры вида $P = P^{l} + P^{bl}$,

$$(22) \qquad P^{l} = \sum_{i,j} 1_{ij}\, p_{ij}^{l}, \;\; p_{ij}^{l} = \left(\frac{\text{-1}}{s_i + s_j^*} \right) \tilde{q}_{ij}, \quad Q = \sum_{i,j} 1_{ij}\, \tilde{q}_{ij} \qquad \forall\; i, j = 1, 2, ...n.$$

$$(23) \qquad P^{bl} = \sum_{i,j,\gamma} P^{bl,ij\gamma}, \quad P^{bl,ij\gamma} = \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{\nu,\mu,} P_{\nu\mu\gamma}^{bl,ij\gamma} = \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{\nu,\mu} 1_{\nu\mu} q_{ij\gamma}\, p_{\nu\mu\gamma}^{bl,ij\gamma},$$

$$q_{ij\gamma} = \left(\frac{\text{-1}}{s_i + s_j^*} \right) a_{\nu i,\gamma} a_{\mu j,\gamma}, \;\; \forall\; i, j = 1, 2, ...n, \forall \gamma = 1, 2, ...H$$

Итеративные алгоритмы вычисления элементов грамиана имеют вид:

$$P^{bl}=\left[p^{bl,ij}\right],\qquad p^{bl,ij}=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=2}^{\infty}p^{bl,(k)ij}.$$

$$(24)\qquad p_{ij\gamma}^{bl(k)ij\gamma}=\sum_{\substack{\pi,\rho,\gamma\\ \pi=i,\rho=j}}q_{ij\gamma}\,p_{\pi\rho\gamma}^{bl(k-1)ij\gamma},\qquad \begin{array}{c} i,j,\nu,\mu=1,2...n;\gamma=1,2...H;\\ \pi=i,\rho=j,k=2,3,...\infty\end{array}$$

$$(25)\qquad p_{\nu\mu\gamma}^{bl(k)ij\gamma}=\sum_{\substack{\pi,\rho,\gamma\\ \pi=i,\rho=j}}p_{\pi\rho\gamma}^{bl(k-1)\pi\rho\gamma}\left[\left(\frac{-1}{s_\nu+s_\mu^*}\right)a_{\nu i,\gamma}a_{\mu j,\gamma}\right],\qquad \begin{array}{c} i,j,\nu,\mu=1,2...n;\gamma=1,2...H;\\ \nu=i,\mu\neq j;\nu\neq i,\mu=j;\\ \nu\neq i,\mu\neq j,k=2,3,...\infty.\end{array}$$

При выполнении условий теоремы последовательности $p_{ij}^{bl(k)ij}$ и $p_{\nu\mu}^{bl(k)ij}$ сходятся абсолютно, а матрица решения обобщенного уравнения Ляпунова положительно определена.

Доказательство.

Важно отметить, что если спектр матрицы А известен, то каждый субграмиан вычисляется независимо от любого другого. Алгоритм итеративного вычисления элемента «$\nu\mu$» субграмиана «ij» следует из (12)

$$(26)\qquad p_{\nu\mu}^{bl(k)ij\gamma}\equiv\left(\frac{-1}{s_\nu+s_\mu^*}\right)a_{\nu i,\gamma}a_{\mu j,\gamma}\,p_{\nu\mu\gamma}^{bl(k-1)ij\gamma},\qquad \begin{array}{c}\forall k=2,3,..N_{end},\forall\gamma=1,2,...,H\\ \forall\,\nu,\mu=1,2,...n,\\ \forall i,j=1,2,...n.\end{array}$$

На шаге "k"=2 равенство (12) имеет вид

$$A_\gamma P^{l,ij}A_\gamma^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{1i,\gamma}a_{1j,\gamma}p^{l,ij} & \cdots & a_{1i,\gamma}a_{nj,\gamma}p^{l,ij}\\ \cdots & a_{\nu i,\gamma}a_{\mu j,\gamma}p^{l,ij} & \cdots\\ a_{ni,\gamma}a_{1j,\gamma}p^{l,ij} & \cdots & a_{ni,\gamma}a_{nj,\gamma}p^{l,ij}\end{bmatrix},$$

где "ij" - индекс субграмиана управляемости (далее для краткости просто субграмиан), соответствующий выбранной комбинации собственных чисел; ν есть номер строки, μ номер столбца субграмиана; $p^{l,ij}$ - элемент субграмиана линейной части, стоящий на пересечении строки "i" и столбца "j." Применив тождество (16) к равенству (12), получим сепарабельное спектральное разложение субграмиана билинейной части на шаге"k" = 2.

$$P^{bl(2),ij}=\sum_{\nu,\mu,\gamma}\left(\frac{-1}{s_\nu+s_\mu^*}\right)1_{\nu\mu}a_{\nu i,\gamma}a_{\mu j.\gamma}p^{l,ij}.$$

Для элементов субграмиана "ij" линейной части справедливы тождества

$$p_{\nu\mu\gamma}^{bl(1)ij\gamma}\equiv p^{l,ij},\forall i,j,\nu,\mu=1,...n,\forall\gamma=1,...H.$$

Подставляя их в (16) получим формулу (23) теоремы 2. Заметим, что для шага "k" = 2 субграмиан билинейной части наследует свойство сепарабельности соответствующего субграмиана линейной части. На всех следующих шагах это свойство нарушается. Докажем справедливость формул (24) - (26) используя метод математической индукции. Во-первых, убедимся в справедливости формул для шага "k" = 3. Начиная с этого шага в формулах возникает суммирование элементов по всевозможным комбинациям индексов π,ρ. Формула (16) переходит в формулу

$$p_{ij\gamma}^{bl(3)ij\gamma}=\sum_{\substack{\pi,\rho\\ \pi=i,\rho=j}}q_{ij\gamma}\,p_{\pi\rho\gamma}^{bl(2)\pi\rho\gamma},\qquad \begin{array}{c}\forall i,j,\nu,\mu=1,2...n;\forall\gamma=1,2...H;\\ \forall\pi=i,\forall\rho=j.\end{array}$$

$$p_{\nu\mu\gamma}^{bl(3)ij\gamma} = \sum_{\substack{\pi,\rho \\ \pi=i,\rho=j}} p_{\pi\rho\gamma}^{bl(2)\pi\rho\gamma} \left[\left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*} \right) a_{\nu i,\gamma} a_{\mu j,\gamma} \right], \qquad \begin{array}{r} \forall i,j,\nu,\mu=1,2...n; \forall\gamma=1,2...H; \\ \nu=i,\mu\neq j; \nu\neq i,\mu=j; \\ \nu\neq i,\mu\neq j. \end{array}$$

Предположим далее, что формулы (24)-(25) выполняется для шага "k-1." Для ведущих элементов субграмиана «*ij*» в соответствии с (13) спектральное разложение по индексам π, ρ приводит к формуле (24). Из формулы (14) вытекает справедливость равенств для ведомых элементов субграмиана

$$p_{\nu\mu\gamma}^{(k)ij\gamma} = \left(\frac{s_i + s_j^*}{s_\nu + s_\mu^*} \right) \left(\frac{a_{\nu i,\gamma}}{a_{ii,\gamma}} \right) \left(\frac{a_{\mu j,\gamma}}{a_{jj,\gamma}} \right) p_{ij\gamma}^{(k)ij\gamma}.$$

Это доказывает формулу (25) Теоремы 3.Мы доказали, что матрица *P* являющеюся решением ОУЛ (5) является грамианом управляемости исходной системы. Отсюда следует, что в соответствии с теоремой 3 [10] справедливо утверждение о положительной определенности матрицы *P*.

Рассмотрим далее элемент «*ijγ*» матрицы ядра Вольтерра на шаге «k»

$$\sum_{i,j} P^{bl(k)ij\gamma} = \sum_{i,j} \mathbf{1}_{ij} p^{bl(k)ij\gamma}, \quad P^{bl(k)ij\gamma} = \sum_{\nu,\mu} \mathbf{1}_{\nu\mu} p_{\nu\mu}^{bl(k)ij\gamma}.$$

Ведущие элементы $p_{ij}^{bl(k)ij}$ спектрального разложения матрицы согласно тождеству (17) образуют геометрическую прогрессию, первый член которой совпадает с соответствующим элементом грамиана линейной части $p^{l,ij}$, а знаменатель равен

$$q_{ij}^{\gamma} = \left(\frac{-1}{s_i + s_j^*} \right) a_{ii,\gamma} a_{jj,\gamma}, \qquad i,j = 1,2,...n; \gamma = 1,2....H.$$

Сумма последовательности ведущих элементов, начиная с шага «*k*»=2 и заканчивая шагом «*k*»=N_e равна

$$\sum_{k=2}^{N_e} \sum_{i,j} p_{ij}^{bl)k)ij\gamma} = p^{l,ij} \frac{1 - q_{ij\gamma}^{N_e}}{1 - q_{ij\gamma}}.$$

С другой стороны, из формул (16) следует, что элементы матриц субгамианов $p_{ij}^{bl(k-1)ij\gamma}$ входят в качестве сомножителей в ведомые элементы субграмианов $p_{\nu\mu}^{bl(k-1)ij\gamma}$ для индексов $i,j,\nu,\mu = 1,2...n; \gamma = 1,2...H; \nu = i, \mu \neq j;$ $\nu \neq i, \mu = j; \nu \neq i, \mu \neq j$. А именно

$$p_{\nu\mu\gamma}^{bl(k-1)ij\gamma} \equiv \left(\frac{s_i + s_j^*}{s_\nu + s_\mu^*} \right) \left(\frac{a_{\nu i,\gamma}}{a_{ii,\gamma}} \right) \left(\frac{a_{\mu j,\gamma}}{a_{jj,\gamma}} \right) p_{ij\gamma}^{bl(k-1)ij\gamma}.$$

Все отдельные последовательности в общем случае являются комплекснозначными. Для доказательства сходимости последовательности частичных сумм применим признак сравнения и построим мажорирующую последовательность из модулей членов последовательностей. Для каждого шага «*k*» и каждой матрицы A_γ имеют место итеративные соотношения (24)- (25). Построим ряд сравнения для элементов субграмиана «*ij,γ*» для шага «*k*». Из формул (24) – (25) следует, что каждый элемент последовательности представляет собой взвешенную сумму всех ведущих элементов на предыдущем шаге. Для модулей левой и правой части равенств (24) – (25) справедливы неравенства

$$\left| p_{ij\gamma}^{bl(k)ij\gamma} \right| \le \sum_{\substack{\pi,\rho \\ \pi=i,\rho=j}} \left| q_{ij\gamma} \right| \left| p_{\pi\rho\gamma}^{bl(k-1)\pi\rho\gamma} \right|, \qquad i,j,\nu,\mu = 1,2...n; \gamma = 1,2...H; \; \pi=i,\rho=j,$$

$$\left| p_{\nu\mu\gamma}^{bl(k)ij\gamma} \right| \le \sum_{\substack{\pi,\rho \\ \pi=i,\rho=j}} \left| p_{\pi\rho\gamma}^{bl(k-1)\pi\rho\gamma} \right| \left\| \left[\left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*} \right) a_{\nu i,\gamma} a_{\mu j,\gamma} \right] \right\|, \qquad i,j,\nu,\mu=1,2...n; \gamma=1,2...H; \; \nu=i,\mu\ne j; \nu\ne i,\mu=j; \; \nu\ne i,\mu\ne j$$

Модули ведущих элементов $p_{\pi\rho\gamma}^{bl(k-1)\pi\rho\gamma}$ спектрального разложения матрицы субграмиана образуют геометрическую прогрессию. Отсюда следуют тождества

$$(27) \qquad \left| p_{ij\gamma}^{bl(k-1)ij\gamma} \right| \equiv \left| p^{l,ij} \right| \left| \left(\frac{-1}{s_i + s_j^*} \right) a_{ii,\gamma} a_{jj,\gamma} \right|^{k-1}, \qquad \forall i,j = 1,2...n; \forall k = 2,..\infty; \forall \gamma = 1,2...H;$$

$$\left| p_{\nu\mu\gamma}^{bl(k)ij\gamma} \right| \equiv \left| p^{l,ij} \right| \left[\left| \left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*} \right) a_{\nu i,\gamma} a_{\mu j,\gamma} \right| \right]^{k-1}, \quad \forall i,j,\nu,\mu=1,2...n; \forall k=2,..\infty; \forall\gamma=1,2...H; \; \nu=i,\mu\ne j; \nu\ne i,\mu=j; \; \nu\ne i,\mu\ne j$$

В соответствии с признаками сравнения последовательности ведущих и ведомых элементов субграмианов билинейной части сходятся абсолютно при выполнении условий

$$(28) \qquad \left| \left(\frac{-1}{s_i + s_j^*} \right) a_{ii,\gamma} a_{jj,\gamma} \right| < 1, \qquad \forall i,j = 1,2...n; \forall \gamma = 1,2...H;$$

$$(30) \qquad \left| \left(\frac{-1}{s_\nu + s_\mu^*} \right) a_{\nu i,\gamma} a_{\mu j,\gamma} \right| < 1, \quad \forall i,j,\nu,\mu = 1,2...n; \forall \gamma = 1,2...H;$$

Поскольку линейная часть устойчива, то существует точная верхняя грань M для обратной величины суммы любых собственных чисел ее матрицы

$$M = \max_{i,j} \left| s_i + s_j \right|^{-1}$$

Для любых элементов матриц A_γ существует точная верхняя грань произведений модулей ее элементов

$$L = \max_{i,j,\nu,\mu} \left| a_{\nu i} a_{\mu j} \right|$$

Отсюда следует, что условия сходимости (29) -(30) можно заменить одним условием (21)

$$ML = \max_{i,j} \left| s_i + s_j \right|^{-1} \times \max_{i,j,\nu,\mu} \left| a_{\nu i,\gamma} a_{\mu j,\gamma} \right| < 1, \quad \forall i,j,\nu,\mu = 1,...n; \forall \gamma = 1,...H.$$

Конец доказательства.

Следствие

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\exists i,j,\gamma : \left| q_{ij\gamma} \right| \ge 1$$

то матричный ряд Вольтерра (2) расходится и обобщенное уравнение Ляпунова не имеет решения

Заключение

В работе разработан метод и получены алгоритмы решения обобщенного уравнения Ляпунова для широкого класса непрерывных нестационарных линейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения, предложенного ранее в [9]. Предложенный подход заключается в применении на каждом шаге итерации спектрального разложения грамиана линейной части на основе спектральных разложений грамианов линейной части по комбинационному спектру матрицы динамики линейной части и агрегировании элементов полученных матриц. Получено спектральное разложение грамиана управляемости нестационарной системы в виде прямой суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части. Принципиальная новизна подхода состоит в переносе вычислений с матрицы решения на вычисление последовательности ее элементов на каждом шаге итерации. Это позволило упростить вычисления и получить компактное аналитическое выражение для матрицы решения обобщенного уравнения Ляпунова. Полученные авторами результаты можно применить к следующим задачам управления:

- К построению наблюдателя пониженного порядка в задачах модального управления и управления устойчивого к отказам,
- К синтезу систем энергосберегающего управления,
- К выбору управляющих входов и мест размещения датчиков на выходах для систем управления многомерных объектов.

Эта работа была поддержана Российским Научным Фондом в рамках проекта РНФ 19-19-0673.

Литература

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems.SIAM. Philadephia, 2005.
2. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М:Физматлит.2007.224 с.
3. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.-М: Наука. Физматлит. 1967.
4. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами М: Наука. 1976.424 с.
5. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
6. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Спектральные разложения решений уравнений Ляпунова для билинейных динамических систем.// ДАН, Том 488, №6, С.
7. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: I. Задача анализа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 2. С. 46-63
8. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.
9. *Benner, P., Cao, X., Schilders, W.* A bilinear H2 model order reduction approach to linear parameter-varying systems. // Advances in Computational Mathematics 45:2241–2271. 2019
10. *Zhang, L.,Lam,J.* On H_2 model order reduction of bilinear systems.Automatica.2002 Vol. 38. Pp. 205-216.