DOI:

О МНОГОЗНАЧНЫХ ПРОСТЫХ ВОЛНАХ

Туницкий Д.В.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия, г. Москва
ул. Профсоюзная д.65
dtunitsky@yahoo.com

Аннотация: Рассматривается одномерное квазилинейное волновое уравнение, для которого формулируется теорема об однозначной глобальной разрешимости в классе многозначных решений, являющихся простыми волнами. Приведены примеры многозначных простых волн, иллюстрирующие сформулированную теорему.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения, гиперболичность, многозначные решения, характеристическая униформизация.

Введение

Решение ряда важных задач механики сплошной среды связано с исследованием свойств *квазилинейного волнового уравнения*

$$(1)\ z_{tt} - g^2(z_x) z_{xx} = 0,$$

где $g = g(q)$ – заданный положительный коэффициент класса C^∞,

$$(2)\ g: (\alpha, \beta) \ni q \longmapsto g(q) \in (0, +\infty).$$

Здесь независимая переменная t играет роль времени, x – пространственной координаты, а решение

$$(3)\ z = z(t, x)$$

– смещения среды. Неравенство коэффициента (2) нулю эквивалентна *гиперболичности* уравнения (1). В дальнейшем мы будем использовать обозначения Монжа

$$(4)\ p = z_t(t, x),\ q = z_x(t, x),$$

Например, уравнение (1) используется для моделирования нелинейных колебаний однородной струны, см. [1, гл.2, §1], [2, гл.16, §10], [3], распространения волн в эластично-пластичном стержне, см. [4, разд. 98] и некоторых течений сжимаемых газов с плоской симметрией, cf. [4, разд.18], [5; гл.1, §5, разд.2; гл.2, §2, разд.8].

Пример. В лагранжевом представлении одномерное течение сжимаемого баротропного газа без учета вязкости и теплопроводности описывается системой уравнений

$$(5)\ \mathcal{u}_t + \mathcal{p}'(V) V_x = 0,\ V_t - \mathcal{u}_x = 0.$$

Неизвестные функции $\mathcal{u} = \mathcal{u}(x, t)$ и $V = V(x, t)$ – скорость и удельный объем течения, независимая переменная x – массовая лагранжева координата, а $\mathcal{p}$ – давление, описываемое уравнением состояния

$$\mathcal{p} = \mathcal{p}(V),$$

где $\mathcal{p}'(V) < 0$ для $0 < V < +\infty$. В силу второго уравнения (5) равенства

$$z_x = V,\ z_t = \mathcal{u}$$

корректно определяют эйлерову координату z (3), которая удовлетворяет уравнению (1) с коэффициентом

$$(6)\ g(q) = \sqrt{-\mathcal{p}'(q)},$$

заданным на интервале (α, β) при $\alpha = 0$ и $\beta = +\infty$.

Левой части уравнения (1) очевидным образом отвечает дифференциальная 2-форма

$$(7)\ \omega_2 = dp \wedge dx - g^2(q) dt \wedge dq$$

в области

$$(8)\ M = \mathbb{R}^3 \times (\alpha, \beta) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^5,$$

а условиям (4), связывающим независимые и зависимые переменные t, x и p, q, z, соответствуют контактная форма в области M и ее внешняя производная

$$(9)\ \omega_0 = dz - p dt - q dx,\ \omega_1 = d\omega_0 = dt \wedge dp + dx \wedge dq,$$

см. [6] и [7; гл. 11]. Геометризацией известного понятия классического решения уравнения (1) служит *многозначное решение*, см. [8], – погружение

$$(10)\quad \sigma: S \longrightarrow M$$

двумерного многообразия S, удовлетворяющее внешним дифференциальным уравнениям

$$(11)\quad \sigma^*\omega_0 = 0,\ \sigma^*\omega_1 = 0,\ \sigma^*\omega_2 = 0.$$

Как известно, см. [9], у классических решений нелинейных гиперболических уравнений даже при регулярных входных данных и конечном изменении независимых переменных могут возникать особенности, так называемые *градиентные катастрофы*. Введение многозначных решений направлено на преодоление этой проблемы.

1 Характеристические формы и кривые

В области M (8) при $j = 1{,}2$ определены линейные дифференциальные формы

$$(1.1)\quad \omega_{j,1} = dx + (-1)^j g(q)dt,\ \omega_{j,2} = dp + (-1)^j g(q)dq,$$

которые называются *характеристическими*. Очевидно, что для этих форм и 2-форм ω_2 (7) и ω_1 (9)

$$\omega_2 - h(q)g(p)\omega_1 = \omega_{1,1} \wedge \omega_{1,2},\ \omega_2 + h(q)g(p)\omega_1 = \omega_{2,1} \wedge \omega_{2,2}.$$

Следующее утверждение объясняет важное значение характеристических форм (1.1).

Лемма. *(a) Дифференциальные 2-формы ω_2 (7) и ω_1 (9) и* характеристические формы $\omega_{j,1}$ *и* $\omega_{j,2}$ *(1.1) удовлетворяют уравнениям*

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\omega_{1,1} \wedge \omega_{1,2} + \omega_{2,1} \wedge \omega_{2,2}\right),\ \omega_1 = \frac{-1}{2h(q)g(p)}\left(\omega_{1,1} \wedge \omega_{1,2} - \omega_{2,1} \wedge \omega_{2,2}\right).$$

(b) Погружение (10) тогда и только тогда является решением системы (11), когда

$$(1.2)\quad \sigma^*\omega_0 = 0,\ \sigma^*\left(\omega_{1,1} \wedge \omega_{1,2}\right) = 0,\ \sigma^*\left(\omega_{2,1} \wedge \omega_{2,2}\right) = 0.$$

Далее, рассмотрим кривую

$$\gamma: \Gamma \longrightarrow M,$$

где Γ – одномерное связное многообразие. Она является *характеристической кривой уравнения (1), принадлежащей j-му семейству*, $j = 1{,}2$, если

$$(1.3)\quad \gamma^*\omega_0 = 0,\ \gamma^*\omega_{j,1} = 0,\ \gamma^*\omega_{j,2} = 0.$$

Пусть погружение σ (9) – многозначное решение уравнения (1). Тогда по утверждению (b) леммы для этого погружения выполняются уравнения (1.2). Поэтому обратные образы $\sigma^*\omega_{j,1}$ и $\sigma^*\omega_{j,2}$ 1-форм $\omega_{j,1}$ и $\omega_{j,2}$ (1.1) линейно независимы, и, следовательно, линейные алгебраические уравнения

$$(1.4)\quad \sigma^*\omega_{j,1}{}_{|\,h} = 0,\ \sigma^*\omega_{j,2}{}_{|\,h} = 0$$

однозначно определяют одномерное подрасслоение h касательного расслоения TS при $j = 1{,}2$. Таким образом, по теореме Фробениуса, см. [10; разд. 2.32], получаем следующее утверждение.

Предложение. *Пусть погружение (10) является многозначным решением уравнения (1). Тогда для всякой точки $s \in S$ и номера $j = 1{,}2$ существует единственное максимальное интегральное многообразие*

$$(1.5)\quad \gamma_{j,s}: \Gamma_{j,s} \longrightarrow S$$

системы

$$(1.6)\quad \gamma_{j,s}^*\sigma^*\omega_{j,1} = 0,\ \gamma_{j,s}^*\sigma^*\omega_{j,2} = 0,$$

содержащее точку s. Здесь $\Gamma_{j,s}$ – связное одномерное многообразие.

Из уравнений (1.3), (1.4) и (1.6) вытекает, что композиция $\sigma \circ \gamma_{j,s}$ отображений (10) и (1.5) является характеристической кривой уравнения (1), принадлежащей j-му семейству. Естественно, в случае классического решения таким образом получается обычная характеристическая кривая.

2 Задача Коши

Зададим для уравнения (1) начальные значения. Для этого рассмотрим погружение

$$(2.1)\quad l: I \longrightarrow M$$

интервала $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, в область M (8). Это погружение называется *начальной кривой* и определяет *начальные значения* для уравнения (1), если для $a < \tau < b$ выполняются условия

$$(2.2)\quad \omega_0\left(\dot{l}(\tau)\right) = 0,\ \omega_{1,1}^2\left(\dot{l}(\tau)\right) + \omega_{1,2}^2\left(\dot{l}(\tau)\right) \ne 0,\ \omega_{2,1}^2\left(\dot{l}(\tau)\right) + \omega_{2,2}^2\left(\dot{l}(\tau)\right) \ne 0.$$

Два последних условия означают, начальная кривая l (4.1) *свободна*, т.е. нехарактеристична, см. (1.3).

Обычные начальные значения классического вида задаются для уравнения (1) в начальный момент времени $t = 0$:

$$(2.3)\quad z(0, x) = z_0(x),\ z_t(0, x) = p_0(x),$$

где

$$(2.4)\quad z_0: (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ q_0: (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

– заданные функции. Этим значениям соответствует начальная кривая l (2.1) с координатами

$$(2.5)\quad l^*t(\tau) = 0,\ l^*x(\tau) = \tau,\ l^*p(\tau) = p_0(\tau),\ l^*q(\tau) = z_0'(\tau),\ l^*z(\tau) = z_0(\tau),$$

которая должна лежать в области M (8). Очевидно, что эта кривая является погружением, и поскольку согласно выражениям (1.1)

$$\omega_{1,2}^2\left(\dot{l}(\tau)\right) = \omega_{2,2}^2\left(\dot{l}(\tau)\right) = 1,$$

она удовлетворяет условиям (2.2).

Если для многозначного решения σ (10) уравнения (1) существует такое вложение

$$(2.6)\quad L: I \longrightarrow S,$$

что

$$(2.7)\quad l = \sigma \circ L,$$

то σ называется *решением задачи Коши* (1), (2.1), а L – *начальным вложением*. Таким образом, многозначное решение задачи Коши (1), (2.1) – это пара (σ, L), состоящая из погружения σ (10) и вложения L (2.6), удовлетворяющего коммутационному соотношению (2.7).

Многозначное решение (σ, L) задачи Коши (1), (2.1) называется *определенным*, если для всякого $s \in S$ и $j = 1,2$ пересечение

$$\gamma_{j,s}(\Gamma_{j,s}) \cap L(I)$$

образов начального вложения L (2.6) и характеристической кривой $\gamma_{j,s}$ (1.5) состоит в точности из одной точки.

3 Характеристическая униформизация

Для двух различных точек a и b расширенной вещественной прямой $(-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\}$ положим

$$(3.1)\quad \Pi(a, b) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid min\{a, b\} < u, v < max\{a, b\}\}.$$

Ясно, что $\Pi(a, b)$ – открытый квадрат с вершинами (a, a), (a, b), (b, b) и (b, a), неограниченный, если либо $\min\{a, b\} = -\infty$ или $\max\{a, b\} = +\infty$.

Теорема (характеристическая униформизация, [11; разд.3]). *Пусть (σ, L) – определенное решение (10), (2.6) задачи Коши (1), (2.1)–(2.2). Тогда существует единственный диффеоморфизм*

$$(3.2)\quad \Phi: S \longrightarrow \Phi(S),$$

удовлетворяющий следующим трем свойствам.

(a) Образ $\Phi(S)$ является подмножеством квадрата $\Pi(a, b)$ (3.1) и содержит его диагональ

$$(3.3)\quad \delta(a, b) = \{(\tau, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid a < \tau < b\}.$$

(b) Для начального вложения L (2.6) при $a < \tau < b$ выполняется равенство

$$\Phi \circ L(\tau) = (\tau, \tau).$$

(c) Образы $\Phi \circ \gamma_{j,s}(\tau)$ характеристических кривых $\gamma_{j,s}$ (1.5) при $s \in S$ лежат на координатных прямых $u = const$, если $j = 1$, и $v = const$, если $j = 2$ для $\tau \in \Gamma_{j,s}$.

Введем следующее определение.

Определение. Однозначно определенный сформулированной выше теоремой диффеоморфизм Φ (3.2) называется *характеристической униформизацией* определенного решения (σ, L). Координатная плоскость параметров u, v, а также и сами эти координаты тоже называются *характеристическими*.

По теореме о характеристической параметризации на всяком определенном решении (σ, L) (10), (2.6) задачи Коши (1), (2.1) посредством диффеоморфизма Φ (3.2) задана глобальная система координат, которая позволяет сопоставить решению (σ, L) *униформзированное решение*

$$(3.4)\quad \psi = \sigma \circ \Phi^{-1}.$$

Понятно, что пара $\left(\psi, Id_{(a,b)} \,\Delta\, Id_{(a,b)}\right)$, где

$$Id_{(a,b)} \,\Delta\, Id_{(a,b)} : (a, b) \ni \tau \longmapsto (\tau, \tau) \in \Pi(a, b)$$

– диагональ тождественного отображения $Id_{(a,b)}$ интервала (a, b), также является определенным решением задачи Коши (1), (2.1). Очевидно, что характеристической униформизацией решения (3.4) служит тождественное отображение $Id_{\Phi(S)}$ области $\Phi(S)$. Тем самым при нахождении определенных решений можно ограничиться классом отображений σ (10), заданных на соответствующих областях S характеристической плоскости.

Для характеристической униформизации ψ (3.4) определенного решения (σ, L) (10), (2.6) Коши (1), (2.1) согласно уравнениям (1.3), (1.6) характеристических кривых, утверждению (c) теоремы о характеристической униформизации выполняются равенства

$$(3.5)\quad \frac{\partial}{\partial v}(u, v) \lrcorner\, \psi^* \omega_{1,k}(u, v) = 0,\ \frac{\partial}{\partial u}(u, v) \lrcorner\, \psi^* \omega_{2,k}(u, v) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial v}(u, v) \lrcorner\, \psi^* \omega_0(u, v) = 0,\ \frac{\partial}{\partial u}(u, v) \lrcorner\, \psi^* \omega_0(u, v) = 0$$

для всякой точки (u, v) из образа $\Phi(S)$ и номера $k = 1{,}2$. Обозначим через

$$(3.6)\quad t(u, v) = t \circ \psi(u, v),\ x(u, v) = x \circ \psi(u, v),$$
$$p(u, v) = p \circ \psi(u, v),\ q(u, v) = q \circ \psi(u, v),$$
$$z(u, v) = z \circ \psi(u, v)$$

координаты униформизированного решения (3.4). По определению (1.1) характеристических форм уравнения (3.5) эквивалентны квазилинейной характеристической системе

$$(3.7)\quad x_v + g(q) t_v = 0,\ x_u - g(q) t_u = 0,$$
$$p_v + g(q) q_v = 0,\ p_u - g(q) q_u = 0,$$
$$z_v - p t_v - q x_v = 0,\ z_u - p t_u - q x_u = 0$$

относительно неизвестных функций t, x, p, q и z (3.6). В силу равенства (2.7) и утверждения (b) теоремы о характеристической униформизации функции (3.6) принимают начальные значения

$$(3.8)\quad t(\tau, \tau) = t_0(\tau),\ x(\tau, \tau) = x_0(\tau),$$
$$p(\tau, \tau) = p_0(\tau),\ q(\tau, \tau) = q_0(\tau),$$
$$z(\tau, \tau) = z_0(\tau)$$

на диагонали $\delta(a, b)$ (3.3), где

$$t_0(\tau) = t \circ l(\tau),\ x_0(\tau) = x \circ l(\tau),$$
$$p_0(\tau) = p \circ l(\tau),\ q_0(\tau) = q \circ l(\tau),$$
$$z_0(\tau) = z \circ l(\tau)$$

для $\tau \in (a, b)$. В частности, для начальной кривой (2.5), отвечающей начальным условиям классического вида (2.3), (2.4), имеем

$$(3.9)\quad t_0(\tau) = 0,\ x_0(\tau) = \tau,$$
$$q_0(\tau) = z_0'(\tau)$$

при $-\infty < \tau < +\infty$. Для начальных значений (3.13) согласно первому условию согласованности (2.2) должно выполняться равенство

$$z_0' - p_0 t_0' - q_0 x_0' = 0,$$

а согласно второму и третьему условиям свободности (2.2) – неравенства

$$(p_0' + g(p_0) p_0')^2 + (t_0' + g(q_0) x_0')^2 \neq 0,$$

$$(p_0' - g(q_0)q_0')^2 + (t_0' - g(q_0)x_0')^2 \neq 0.$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

ЛЕММА. *Для всякого определенного решения* (σ, L) *(10), (2.6) задачи Коши (1), (2.1) функции (3.6) являются решением характеристической системы (3.7), принимающим начальные значения (3.8).*

ЗАМЕЧАНИЕ. По-видимому, впервые характеристические системы использовались Гансом Леви для доказательства локального существования и единственности классического решения задачи Коши для нелинейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, см. [12], а также [13; sect.5,6] и [14; гл.V, прил.1]. В связи с этим возможной альтернативой для их названия может быть «*системы Ганса Леви*».

4 Простые волны

Определенное решение (σ, L) (10), (2.6) задачи Коши (1), (2.1) называется *простой волной Римана*, если

$$d\sigma^* q \wedge d\sigma^* p = 0,$$

см. [4; sect. 29]. Используя лемму из предыдущего раздела можно показать, что справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА. *Решение* (σ, L) *тогда и только тогда является простой волной, когда для начальных значений (3.11) хотя бы одна из функций*

$$p_0 + G(q_0),\ p_0 - G(q_0)$$

постоянна, где

$$G = G(q)$$

– неопределенный интеграл от функции $g = g(q)$.

Поскольку первообразная $G(q)$ определена с точностью до постоянной, то в случае начальных значений (3.8) классического вида (3.9) из этой леммы вытекает, что для простой волны (σ, L) возможно либо

$$(4.1)\quad p_0(x) = -G\big(z_0'(x)\big),$$

либо

$$(4.2)\quad p_0(x) = G\big(z_0'(x)\big).$$

С помощью теоремы о характеристической униформизации и леммы из предыдущего раздела можно доказать, что явное представление простой волны в случае (4.1) задается формулами

$$(4.3)\quad x(u,v) = \frac{h(u,v)}{2\sqrt{g_0(v)}},\ y(u,v) = v + \frac{\sqrt{g_0(v)}}{2}h(u,v),$$

$$p(u,v) = p_0(v),\ q(u,v) = q_0(v),$$

$$z(u,v) = z_0(v) + \frac{p_0(v)+g_0(v)q_0(v)}{2\sqrt{g_0(v)}}h(u,v),$$

где

$$(4.4)\quad g_0(\tau) = g\big(z_0'(\tau)\big)$$

и

$$(4.5)\quad h(u,v) = \int_v^u \frac{d\tau}{\sqrt{g_0(\tau)}},$$

и формулами

$$(4.6)\quad x(u,v) = \frac{h(u,v)}{2\sqrt{g_0(u)}},\ y(u,v) = u - \frac{\sqrt{g_0(u)}}{2}h(u,v),$$

$$p(u,v) = p_0(u),\ q(u,v) = q_0(u),$$

$$z(u,v) = z_0(u) + \frac{p_0(u)-g_0(u)q_0(u)}{2\sqrt{g_0(u)}}h(u,v)$$

в случае (4.2).

Положим

$$(4.7)\quad \pi\colon \mathbb{R}^5 \ni (t,x,p,q,z) \mapsto (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Используя лемму из данного раздела и выведенные явные формулы для простых волн можно доказать следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что*

$$(4.8)\quad \lim_{t\to-\infty}\frac{\tau}{g_0(\tau)}=-\infty,\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\tau}{g_0(\tau)}=+\infty,\quad \int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{\sqrt{g_0(\tau)}}=+\infty,\quad \int_{-\infty}^{0}\frac{d\tau}{\sqrt{g_0(\tau)}}=+\infty.$$

Тогда существует единственное многозначное решение (σ,L) (10), (2.6) задачи Коши (1), (2.1), (4.1)–(4.2), определенное на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, являющееся простой волной и обладающее следующими свойствами:

$$(a)\ при -\infty<\tau<+\infty$$

$$t\circ\sigma(\tau,\tau)=0,\ x\circ\sigma(\tau,\tau)=\tau;$$

(b) ограничения решения σ на координатные прямые

$$u=const,\ v=const$$

являются характеристиками;

(c) проекция $\pi\circ\sigma$ является собственным отображением степени 1, *в частности,*

$$\pi\circ\sigma(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2.$$

5 Пример I

Приведем пример применения теоремы из предыдущего раздела.

Уравнение

$$(5.1)\quad z_{tt}-\frac{z_{xx}}{z_x^{\gamma+1}}=0$$

описывает одномерное политропное течение сжимаемого газа с показателем адиабаты γ,

$$\gamma>1.$$

Оно имеет вид (1), (6) и для него коэффициент (2) и его первообразная

$$g(q)=\frac{1}{q^{\frac{\gamma+1}{2}}},\ G(q)=\frac{2}{1-\gamma}q^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

Зададим для уравнения (5.1) начальные значения (3.8) классического вида (3.9):

$$(5.2)\quad p_0(t)=\frac{2(1+t^2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}}}{1-\gamma},\ q_0(t)=(1+t^2)^{\frac{2}{\gamma+1}},$$

$$z_0(t)=\int_0^t(1+\tau^2)^{\frac{2}{\gamma+1}}d\tau.$$

В этом случае, очевидно, выполнены равенства (4.2), так что по лемме из предыдущего раздела решение задачи Коши (5.1), (5.2) , (3.9) является простой волной.

Функция g_0 (4.4) принимает вид

$$g_0(t)=\frac{1}{1+t^2}.$$

Ясно, что условия (4.8) теоремы для этой функции выполнены. Поэтому по этой теореме существует единственное многозначное решение (σ,L) (10), (2.6) задачи Коши (5.1), (5.2), (3.9), определенное на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Явное представление этого решения согласно (4.6) задается формулами

$$(5.2)\quad x(u,v)=\frac{\sqrt{1+u^2}}{2}h(u,v),\ y(u,v)=u-\frac{h(u,v)}{2\sqrt{1+u^2}},$$

$$p(u,v)=\frac{2(1+u^2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}}}{1-\gamma},\ q(u,v)=(1+u^2)^{\frac{2}{\gamma+1}},$$

$$z(u,v)=\int_0^u(1+\tau^2)^{\frac{2}{\gamma+1}}d\tau+\frac{\gamma+1}{1-\gamma}(1+u^2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}}h(u,v),$$

где в соответствии с (4.5)

$$h(u,v)=\int_v^u\sqrt{1+\tau^2}d\tau=\frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+1}-v\sqrt{v^2+1}+ln\frac{u+\sqrt{1+u^2}}{v+\sqrt{1+v^2}}\right).$$

По теореме проекция π (4.7) решения (5.2) является собственным отображением степени 1, и ее образом служит вся плоскость независимых переменных t и x.

6 Пример II

Зададим для уравнения (5.1) другие начальные значения (3.8) классического вида (3.9):

$$(6.1)\quad p_0(t) = \frac{2\left(1+t^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}}{1-\gamma},\; q_0(t) = (1+t^2)^{\frac{-2}{\gamma+1}},$$

$$z_0(t) = \int_0^t (1+\tau^2)^{\frac{-2}{\gamma+1}} d\tau.$$

В этом случае, как и в предыдущем примере, очевидно, выполнены равенства (4.2), так что по лемме из предыдущего раздела решение задачи Коши (5.1), (6.1), (3.9) является простой волной.

Функция g_0 (4.4) принимает вид

$$g_0(t) = 1 + t^2.$$

Ясно, что условия (4.8) теоремы из раздела 4 для этой функции не выполнены. Явное представление решения (σ, L) (10), (2.6) задачи Коши (5.1), (6.1), (3.9) согласно (4.6) задается формулами

$$(6.2)\quad x(u,v) = \frac{h(u,v)}{2\sqrt{u^2+1}},\; y(u,v) = u - \frac{\sqrt{u^2+1}}{2} h(u,v),$$

$$p(u,v) = \frac{2\left(1+u^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}}{1-\gamma},\; q(u,v) = (1+u^2)^{\frac{-2}{\gamma+1}},$$

$$z(u,v) = \int_0^u (1+\tau^2)^{\frac{-2}{\gamma+1}} d\tau - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} (1+u^2)^{\frac{\gamma-3}{2(\gamma+1)}} h(u,v),$$

где в соответствии с (4.5)

$$h(u,v) = ln\frac{u+\sqrt{1+u^2}}{v+\sqrt{1+v^2}} = arsh\, u - arsh\, v.$$

Выясним, что служит образом проекции π (4.7) простой волны (6.2) на плоскость независимых переменных t и x.

Из (6.2) видно, что переменные u, t и x связаны соотношением

$$x = u - (1+u^2)t.$$

При фиксированных t и x это соотношение можно рассматривать как алгебраическое уравнение относительно u:

$$tu^2 - u + t + x = 0.$$

Если $t = 0$, то это уравнение линейно и имеет единственный корень $u = y$, которому согласно (6.2) соответствует $v = u$. Иными словами, точки (u,u) диагонали $\delta(a,b)$ (3.3) взаимно-однозначно проектируются на точки $(0,u)$ оси Ox. Если $t \neq 0$, то это уравнение второго порядка и, если его дискриминант

$$R(t,x) = 1 - 4t(t+x)$$

меньше нуля, $R < 0$, то оно не имеет вещественных корней, а если $R \geq 0$, то имеет два вещественных корня

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t(t+x)}}{2t},$$

каждому из которых согласно (6.2) соответствует координата

$$v = sh\left(arsh\, u - 2x\sqrt{u^2+1}\right).$$

Иными словами, внутренние точки (x,y) множества

$$(6.3)\quad \{(t,x) \mid t \neq 0,\; R(t,x) > 0\}$$

имеют по два прообраза

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{R(t,x)}}{2t}, sh\left(arsh\frac{1\pm\sqrt{R(t,x)}}{2t} - \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{R(t,x)}\right)^2 + 4t^2}\right)\right)$$

на плоскости характеристических переменных u и v, а граничные – по одному: (x,x) при $t = 0$ и

$$\left(\frac{1}{2t}, sh\left(arsh\frac{1}{2t} - \sqrt{1+4t^2}\right)\right)$$

при $t \neq 0$. Замыкание множества (6.3) и служит образом простой волны (6.2) относительно проекции π (4.3). Границей этого образа является кривая второго порядка с уравнением $R(t,x) = 0$ – гипербола с асимптотами $t = 0$ и $x = -t$ и вершинами

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}\right),\ \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{2\sqrt{6}}\right).$$

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Японского общества продвижения науки (грант № 19-51-50005 ЯФ_а) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00610 А)

Литература

1. *Taylor M.* Partial differential equations. Vol. 1, Basic Theory. – New York: Springer–Verlag. 1996. – 563 p.
2. *Taylor M.* Partial differential equations. Vol. 3, Nonlinear Equations. – New York: Springer–Verlag. 1996. – 572 p.
3. *Zabusky N.J.* Exact Solution for the Vibrations of a Nonlinear Continuous Model String, J. Math. Phys. 3:5 (1962). – P. 1028–1039.
4. *Courant R., Friedrichs K.O.* Supersonic flow and shock waves. – New York: Interscience Publishers, Inc. 1948. – 464 p.
5. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
6. *Лычагин В.В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. 1979. Т. 34, №1. С. 137–165.
7. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia Math. Appl., 101. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – 386 p.
8. *Виноградов А. М.* Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 210:1 (1973). – С. 11–14.
9. *Lax P. D.* Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations // J. Math. Phys. 5:5 (1964). – P. 611–613.
10. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. – М.: Мир, 1988. – 302 с.
11. *Туницкий Д.В.* О глобальной разрешимости гиперболических уравнений Монжа–Ампера // Известия РАН. Серия математическая. 61:5 (1997). – С. 177–224.
12. *H. Lewy,* Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen // Math. Ann., 98 (1928). – P. 179–191.
13. *P. Hartman and A.* Wintner, On hyperbolic partial differential equations, Amer. J. Math., 74 (1952). – P. 834–864.
14. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.