DOI:

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Кушнер А.Г., Лычагин В.В., Рооп М.Д.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

kushner@physics.msu.ru, valentin.lychagin@uit.no, mihail_roop@mail.ru

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления в равновесной термодинамике идеальных газов. На Лежандровом многообразии идеального газа находится кривая термодинамического процесса, доставляющая максимум функционалу работы. Ограничения для управляющих параметров получены с использованием римановых структур на термодинамических Лежандровых многообразиях. Показано, что в случае идеального газа соответствующая гамильтонова система является интегрируемой в смысле Лиувилля, приводится ее решение в квадратурах, доказана управляемость такой системы.

Ключевые слова: термодинамика, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, гамильтоновы системы, интегрируемость.

Введение

Проблема оптимального управления термодинамическими процессами представляет интерес еще с 19 века, когда была опубликована классическая работа Карно [1], положившая начало изучению оптимальных тепловых машин. В относительно недавней серии работ [2] проблема оптимального управления была решена с помощью принципа максимума Понтрягина. В работе [2] рассматривается неравновесная термодинамическая система, которая представляется как совокупность равновесных подсистем с линейными законами теплопередачи между каждой парой подсистем, и максимизируется работа такой системы. Объемы подсистем рассматриваются как управляющие параметры, тогда как переменными состояния являются энтропии подсистем.

В настоящей работе формулировка равновесной термодинамики в терминах контактной геометрии (см., например, [3]), а также использование римановых структур на термодинамических состояниях газов позволяет поставить задачу оптимального управления, гамильтонова система которой оказывается вполне интегрируемой. В этом случае можно построить переменные «действие-угол», с помощью которых ее можно явно проинтегрировать.

1 Постановка задачи

Рассмотрим контактное пространство R^5 с координатами (s, e, v, p, T), обозначающими соответственно удельные энтропию, внутреннюю энергию, объем, а также давление и температуру. Контактная структура на $R^5(s, e, v, p, T)$ задана с помощью дифференциальной 1-формы θ следующим образом:

$$(1)\ \ \theta = -ds + T^{-1}de + pT^{-1}dv.$$

Тогда термодинамическое состояние – Лежандрово многообразие L контактной структуры θ, то есть $\dim(L) = 2$, $\theta|_L = 0$. Это означает выполнение первого начала термодинамики на L. Если выбрать (e, v) в качестве локальных координат на L, то получим:

$$(2)\ L = \left\{ f_1 = p - \frac{\sigma_v}{\sigma_e} = 0,\ f_2 = T - \frac{1}{\sigma_e} = 0,\ f_3 = s - \sigma(e, v) = 0 \right\}.$$

Также на термодинамическом контактном пространстве определена дифференциальная квадратичная форма

$$(3)\ \epsilon = d(T^{-1}) \cdot de + d(pT^{-1}) \cdot dv,$$

ограничение которой $-\epsilon|_L$ на Лежандрово многообразие L задает на нем риманову структуру, $-\epsilon|_L > 0$. Физический смысл $-\epsilon|_L$ - дисперсия измерений случайного вектора (e, v). В качестве базиса в модуле векторных полей на L выберем ограничения Y_1, Y_2 контактных векторных полей X_{f_1}, X_{f_2} с производящими функциями [4] f_1 и f_2, заданными в (2). Тогда задача заключается в нахождении интегральной кривой l векторного поля $Y = u_1 Y_1 + u_2 Y_2$, где коэффициенты (u_1, u_2) играют роль управляющих параметров и являются функциями на L.

Сформулируем требования, которым должен удовлетворять термодинамический процесс l. Пусть t - параметр на l. Будем считать, что значение $t = 0$ соответствует заданному начальному состоянию $x^{(1)} = (e_1, v_1)$, а фиксированное значение $t = t_0$ – заданному конечному $x^{(2)} = (e_2, v_2)$. Введем форму работы $\omega = pdv$, с помощью которой зададим функционал качества

$$(4)\ J(u) = \int_0^{t_0} \omega(Y)dt \to \max_{u\in U} J(u).$$

Допустимую область U для управляющих параметров (u_1, u_2) зададим с помощью римановой структуры $-\epsilon|_L$ следующим образом:

$$(5)\ -\frac{\epsilon|_L(Y,Y)}{e^2} \leq \delta,$$

где δ - положительное число. Физически такое ограничение означает, что дисперсия измерений экстенсивных термодинамических величин ограничена положительным числом, которое зависит от внутренней энергии квадратичным образом [3]. Запишем векторное поле Y в виде

$$(6)\ Y = Y^{(1)}(x,u)\frac{\partial}{\partial e} + Y^{(2)}(x,u)\frac{\partial}{\partial v},$$

где коэффициенты $Y^{(1)}(x,u)$ и $Y^{(2)}(x,u)$ определяются с помощью выражений для Y_1, Y_2, а $x = (e, v)$. Тогда окончательно оптимальную задачу можно сформулировать как нахождение траекторий динамической системы

$$(7)\ \dot{x} = F(x,u),\ x \in R^2,\ u \in U,\ x(0) = x^{(1)},\ x(t_0) = x^{(2)},$$

где $F(x,u) = \left(Y^{(1)}(x,u), Y^{(2)}(x,u)\right)$, с функционалом качества в виде (4).

2 Решение задачи оптимального управления для идеального газа

Прежде всего, выпишем все необходимые геометрические конструкции для идеального газа. Лежандрово многообразие L идеального газа задано с помощью функций

$$(8)\ f_1 = pv - RT,\ f_2 = e - \frac{nRT}{2},\ f_3 = s - R\ ln\,(e^{n/2}v),$$

где R - универсальная газовая постоянная, n - число степеней свободы. Дифференциальная квадратичная форма $\epsilon|_L$ имеет вид

$$(9)\ \epsilon|_L = -\frac{nR}{2e^2}de\cdot de - \frac{R}{v^2}dv\cdot dv$$

Базисные векторные поля заданы выражениями

$$(10)\quad Y_1 = -\frac{2ev}{nR}\partial_v,\ Y_2 = -\frac{2e^2}{nR}\partial_e.$$

Используя (9) и (10), можно заключить, что область допустимых управлений, найденная по формуле (5), имеет вид

$$(11)\quad U = \left\{(u_1,u_2) \in R^2 \middle| \frac{4}{Rn^2}u_1^2 + \frac{2}{Rn}u_2^2 \leq \delta\right\},$$

и ее граница является эллипсом с постоянными полуосями. Введем новые координаты (q_1, q_2) на L следующим образом:

$$(12)\quad e = \frac{nR}{2q_1},\ v = exp\left(-\frac{q_2}{q_1}\right),$$

Тогда векторные поля Y_1, Y_2 примут более простой вид:

$$(13)\quad Y_1 = \partial_{q_2},\ Y_2 = \partial_{q_1} + \frac{q_2}{q_1}\partial_{q_2}.$$

Функция Понтрягина задачи (7) имеет вид:

$$(14)\quad P(q,\lambda,u) = -Ru_1q_1^{-2} + \lambda_1u_2 + \lambda_2(q_2q_1^{-1}u_2 + u_1).$$

Поскольку функция Понтрягина (14) линейна по (u_1, u_2), то она достигает максимума на границе области допустимых управлений. Следовательно, закон управления имеет вид:

$$(15)\quad u_1^* = \frac{n\sqrt{R\delta}}{2}cos(\tau^*),\ u_2^* = \sqrt{\frac{nR\delta}{2}}sin(\tau^*),$$

где τ^* задается выражением

$$(16)\quad \tau^*\,(q,\lambda) = \pi(2k+1) - arctan\left(\frac{\sqrt{2}q_1(q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2)}{\sqrt{n}\left(R - q_1^2\lambda_2\right)}\right),\ \ k \in Z.$$

Для нахождения траекторий требуется решить каноническую систему

$$(17)\quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial\lambda},\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

где $H(q,\lambda) = P\big(q,\lambda,u^*(q,\lambda)\big)$. Поскольку гамильтониан $H(q,\lambda)$ явно не зависит от параметра t, то он является интегралом системы (17).

Теорема 1. Гамильтонова система (17) обладает интегралом $G(q,\lambda) = q_1\lambda_2$, который находится в инволюции с гамильтонианом $H(q,\lambda)$.

Таким образом, гамильтонова система (17) интегрируема в смысле Лиувилля. Для таких систем можно ввести переменные «действие-угол», в которых она принимает наиболее простой вид и интегрируется в квадратурах.

Теорема 2. Переменные типа «угол» имеют вид [5]

$$(18) \quad \Omega_1 = \pm\int \frac{4H_1 q_1^2}{\sqrt{D}}dq_1,\ \Omega_2 = \frac{q_2}{q_1} \pm \int \frac{n^2 R\delta(R - H_2 q_1)}{q_1\sqrt{D}}dq_1,$$

где $D = 2R\delta n(4H_1^2 q_1^4 - \delta R n^2 (R - H_2 q_1)^2)$. Гамильтонова система (17) эквивалентна системе

$$(19) \quad \dot{\Omega}_1 = 1,\quad \dot{\Omega}_2 = 0.$$

Таким образом, решение гамильтоновой системы (17) имеет вид

$$(20) \quad \Omega_1 = t + \alpha_1,\ \Omega_2 = \alpha_2,$$

где α_1, α_2 - константы, которые находятся из условий на правом и левом концах.

Заметим, что формулы (18) определены корректно только в том случае, когда $D > 0$. Отсюда естественным образом возникает вопрос о том, для любых ли начального x_1 и конечного y_1 состояний будет существовать траектория, переводящая систему из x_1 в y_1 за конечное время, то есть вопрос об управляемости. Это имеет место только в том случае, если выражение $D > 0$ всюду на промежутке $[x_1, y_1]$.

Теорема 3. Динамическая система (7) в случае идеального газа является управляемой.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 18-29-10013).

Литература

1. *Carnot, S., Thurston, H. (ed.).* Reflections on the Motive Power of Fire. – New York: John Willey & Sons., 1897.
2. *Rozonoer, L.I., Tsirlin, A.M.* Optimal control of thermodynamic processes // Automation and Remote Control. Vol. 44(1,2,3). 1983. – P.55-62, 209-220, 314-326.
3. *Lychagin, V.* Contact Geometry, Measurement, and Thermodynamics. In Nonlinear PDEs, Their Geometry and Applications. – Cham: Birkhauser, 2019.
4. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and non-linear differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
5. *Kushner A., Lychagin V., Roop M.* Optimal thermodynamic processes for gases // Entropy. Vol. 22(4). 2020. – Article: 448.