

DOI:

ДИНАМИКИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА $u_t = f(u)_{xxx}$

Кушнер А.Г.¹, Кушнер Е.Н.²

¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65;

²Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва
Кронштадтский бульвар, д.20.

kushner@physics.msu.ru, ekushner@ro.ru

Аннотация: В работе предложен подход к построению точных решений нелинейного эволюционного дифференциального уравнения третьего порядка, основанный на теории конечномерных динамик. Теория конечномерных динамик, в свою очередь, основана на теории тасующих симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений и является естественным распространением теории динамических систем на эволюционные уравнения в частных производных. Она делает возможным нахождение семейств решений эволюционных уравнений, зависящих от конечного числа параметров, среди всех решений таких уравнений.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, конечномерные динамики, точные решения, симметрии.

Введение

В работе [6] была построена алгебра дифференциальных инвариантов для эволюционного дифференциального уравнения третьего порядка, обобщающего уравнение Кортевега – де Фриза. В этой работе мы продолжаем изучение уравнений этого класса, и для уравнения

$$(1) u_t = f(u)_{xxx}$$

находим конечномерные динамики первого и второго порядков и с их помощью строим точные решения этого уравнения.

Основные идеи и методы теории конечномерных динамик были сформулированы в работах [3, 7]. Динамики второго порядка для уравнения Бюргерса – Хаксли были построены в работах [4,5]. Динамики третьего порядка были найдены для уравнений типа Рапорта – Лиса, возникающих в теории двухфазной фильтрации. Эти динамики были использованы для построения аттракторов [1]. На основе динамик третьего порядка был построен численный метод для решения начально-краевых задач для уравнений типа Рапорта – Лиса [9].

Применение динамик для построения точных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, не обязательно эволюционных, рассмотрено в [10]. Метод конечномерных динамик для систем эволюционных уравнений приведён в [11]. Теория конечномерных динамик позволяют выделять конечномерные подмногообразия в бесконечномерном пространстве решений эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных.

При исследовании поведения решений нелинейных эволюционных уравнений в частных производных вида

$$u_t = \varphi(x, u, u_x, \dots, u_x^{(n)})$$

основная сложность состоит в том, что в настоящее время отсутствует сколь-нибудь общая теорема существования решений таких уравнений (скажем, в пространстве гладких функций).

Теория конечномерных динамик эволюционных дифференциальных уравнений, предложенная в работах [3,7], является естественным развитием теории динамических систем. Методы этой теории позволяют выделять конечномерные подмногообразия, инвариантные относительно потока, задаваемым эволюционным уравнением, в бесконечномерном пространстве гладких функций.

Эти подмногообразия состоят из решений обыкновенных дифференциальных уравнений и могут быть использованы для построения точных решений эволюционных уравнений даже в случае, когда уравнение не обладает достаточным запасом симметрий, а также для исследования устойчивости решений и для построения новых численных методов.

Это, во-первых, позволяет избежать вопроса о существовании решений, ибо такие подмногообразия состоят из решений обыкновенных дифференциальных уравнений, а кроме того даёт конструктивный метод для их нахождения. Функции на соответствующих пространствах джетов, задающие эти подмногообразия, используются для оценки близости между решениями и, в частности, для определения аттрактора [1].

Нахождение конечномерных динамик основано на следующих наблюдениях.

Во-первых, конечномерное подмногообразие в пространстве функций от одной переменной x можно рассматривать как пространство решений обыкновенного дифференциального уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$.

Во-вторых, условие, что уравнение $u_t = \varphi(x, u, u_x, \dots, u_x^{(n)})$ описывает эволюции на решениях уравнения $F = 0$, эквивалентно утверждению, что функция φ является производящей функцией для симметрий этого уравнения.

1 Симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений

Напомним основные определения и методы теории симметрий дифференциальных уравнений [1,3,7,8] – одного из основных геометрических методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений. Его основы были заложены норвежским математиком Софусом Ли (Sophus Lie) во второй половине XIX века. В своих работах С. Ли применял симметрии для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве (псевдо)группы выступали инфинитезимальные преобразования, не меняющие дифференциального уравнения, – так называемые симметрии.

Дифференциальное уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$ определяет гиперповерхность

$$\mathcal{E} = \{F(x, y_0, y_1, \dots, y_k) = 0\} \subset J^k(\mathbb{R}) =: J^k$$

в пространстве k -джетов J^k . В этом пространстве также определено распределение Картана \mathcal{C} , заданное нулями дифференциальных 1 форм (форм Картана)

$$\omega_0 = dy_0 - y_1 dx, \quad \omega_1 = dy_1 - y_2 dx, \quad \dots, \quad \omega_{k-1} = dy_{k-1} - y_k dx.$$

То есть

$$\mathcal{C}: \theta \in J^k \rightarrow \mathcal{C}(\theta) = \bigcap_{i=0}^{k-1} \ker \omega_i|_{\theta} \subset T_{\theta}J^k.$$

Здесь $T_{\theta}J^k$ – касательное пространство в точке θ к пространству джетов J^k .

Диффеоморфизм пространства J^k , сохраняющий распределение Картана, называется преобразованием Ли.

Пересечения касательных пространств к гиперповерхности \mathcal{E} с плоскостями распределения Картана определяют одномерное распределение ℓ на этой гиперповерхности:

$$\ell: \theta \in \mathcal{E} \rightarrow \ell(\theta) = \mathcal{C}(\theta) \cap T_{\theta}\mathcal{E}.$$

Симметрией обыкновенного дифференциального уравнения $F = 0$ называется преобразование Ли пространства J^k , сохраняющее гиперповерхность \mathcal{E} .

Очевидно, что симметрия уравнения сохраняет также и распределение ℓ . При этом возможны две ситуации:

- симметрия сохраняет каждую интегральную кривую распределения ℓ ;
- симметрия перемешивает (тасует) интегральные кривые этого распределения.

В первом случае симметрия называется характеристической, а во втором – тасующей. Для построения решений дифференциальных уравнений используются именно тасующие симметрии.

Векторное поле, сдвиги вдоль которого являются (тасующими) симметриями уравнения $F = 0$, называются (тасующими) инфинитезимальными симметриями уравнения. Естественно ограничиться векторными полями на гиперповерхности \mathcal{E} .

Инфинитезимальные тасующие симметрии однозначно определяются своими производящими функциями [8]. Например, если уравнение разрешено относительно старшей производной (а именно с такими уравнениями мы будем иметь дело в этой заметке), т.е.

$$y_k = h(x, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}),$$

то вместо гиперповерхности \mathcal{E} можно рассматривать пространство J^{k-1} с координатами $x, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$. Тогда инфинитезимальная тасующая симметрия имеет вид

$$S_{\varphi} = \varphi \frac{\partial}{\partial y_0} + \mathcal{D}(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathcal{D}^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \mathcal{D}^k(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_{k-1}},$$

где $\varphi = \varphi(x, y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ – так называемая производящая функция, а

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + y_{k-1} \frac{\partial}{\partial y_{k-2}} + h \frac{\partial}{\partial y_{k-1}}$$

– векторное поле на гиперповерхности \mathcal{E} , порождающее распределение ℓ .

2 Динамики эволюционных уравнений

Обыкновенное дифференциальное уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$ называется конечномерной динамикой эволюционного дифференциального уравнения $u_t = \varphi(x, u, u_x, \dots, u_x^{(n)})$ если функция $\varphi(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ является функцией тасующей симметрии этого уравнения [1,3,7,8].

Число k называется порядком динамики. Здесь $u_x^{(n)}$ – частная производная по переменной x порядка n и x, y_0, y_1, \dots, y_n – канонические координаты на пространстве n -джетов функций одной переменной x .

Следующая теорема указывает способ нахождения конечномерных динамик [1].

Теорема 1 Обыкновенное дифференциальное уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$ является конечномерной динамикой эволюционного уравнения $u_t = \varphi(x, u, u_x, \dots, u_x^{(n)})$ тогда и только тогда, когда функция F удовлетворяет дифференциальному уравнению $[\varphi, F] = 0 \text{ mod } \langle \mathcal{D}F \rangle$,

где $\langle \mathcal{D}F \rangle$ – дифференциальный идеал, порожденный функцией $F(x, y_0, y_1, \dots, y_k)$, а $[\varphi, F]$ – скобка Пуассона-Ли, продолженная в пространство джетов [8]:

$$[\varphi, F] = \sum_{i=0}^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} D^i(F) - \frac{\partial F}{\partial y_i} D^i(\varphi) \right).$$

Здесь

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

оператор полного дифференцирования по переменной x .

Если кривая L является многозначным решением уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$, а S_φ – векторное поле тасующей симметрии с производящей функцией $\varphi(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$, то сдвигая кривую L вдоль траекторий этого векторного поля, мы получим многозначное решение уравнения $u_t = \varphi(x, u, u_x, \dots, u_x^{(n)})$.

В следующих разделах мы применим описанный метод к уравнению (1).

3 Динамики первого порядка

Запишем уравнение (1) в виде

$$u_t = f'''(u)u_x^3 + 3f''(u)u_x u_{xx} + f'(u)u_{xxx}.$$

В пространстве k -джетов функций переменной x определим функцию

$$(2) \quad \varphi = f'''(y_0)y_1^3 + 3f''(y_0)y_1 y_2 + f'(y_0)y_3.$$

Для вычисления конечномерных динамик используем теорему 1. В результате прямых вычислений получим следующую теорему.

Теорема 2 Для любой функции f класса C^∞ конечномерные динамики первого порядка уравнения (1) имеют вид:

$$(3) \quad (f'(y_0)y_1)^2 + a(y_0 f(y_0) - \int f(y_0) dy_0) + b f(y_0) + c = 0,$$

где a, b, c – произвольные постоянные.

Пример 1 Для функции $H(y_0) = \frac{y_0^2}{2}$ уравнение (1) имеет вид

$$(4) \quad u_t = 3u_x u_{xx} + u u_{xxx}.$$

Его конечномерные динамики:

$$(5) \quad (y_0 y_1)^2 = \alpha y_0^3 + \beta y_0^2 + \gamma,$$

где α, β, γ – произвольные постоянные. Общее многозначное решение уравнения (4) имеет следующее неявное представление:

$$x + C = \pm \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{\alpha \tau^3 + \beta \tau^2 + \gamma}}.$$

Рассмотрим частный случай динамики (5): $y_1 - \frac{1}{3}\sqrt{y_0} = 0$. Общее решение этого уравнения имеют вид

$$(6) y(x) = \frac{1}{36}(x + C)^2.$$

Векторное поле тасующей симметрий

$$(7) S_\varphi = \frac{1}{18}\sqrt{y_0} \frac{\partial}{\partial y_0},$$

а преобразование сдвига вдоль его траекторий:

$$\Phi_t: (x, y_0) \rightarrow \left(x, \frac{1}{1296}t^2 + \frac{1}{18}t\sqrt{y_0} + y_0\right).$$

Сдвигая решение (6) вдоль траекторий векторного поля S_φ , мы получим однопараметрическое семейство решений уравнения (4):

$$(8) u(t, x) = \frac{1}{1296}(6(x + C) + t)^2,$$

где C - произвольная постоянная. График этого решения при $C = 0$ представлен на рис. 1.

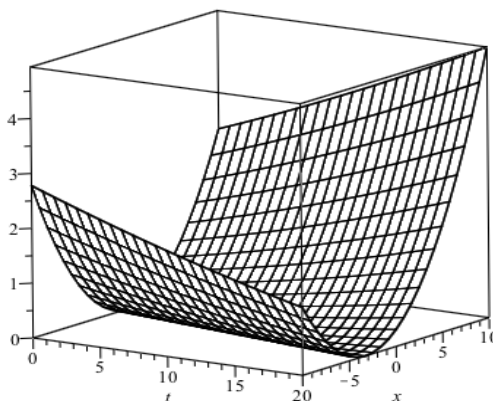


Рис. 1. График решения (8).

4 Динамики второго порядка

Динамики второго порядка будем искать в виде квазилинейного уравнения

$$(9) F = y_2 - A(y_0)y_1 - B(y_0) = 0.$$

Прямые вычисления показывают, что такие динамики существуют лишь когда функция f является полиномом не выше четвёртой степени.

В случае если этот полином имеет четвертую степень, функции A, B тождественно равны нулю.

Однако, если степень полинома равна трём, то существуют нетривиальные динамики:

$$A(y_0) = 0, \quad B(y_0) = \frac{b_1(3f_3y_0 + f_2) + b_2(f_1^2 - 6f_1f_3y_0^2 - 4f_2f_3y_0^3 - 3f_3^2y_0^4)}{(3f_3y_0^2 + 2f_2y_0 + f_1)^3}.$$

Здесь b_1, b_2 - произвольные постоянные, а f_0, \dots, f_3 - коэффициенты полинома f :

$$f(u) = \sum_{i=0}^3 f_i u^i.$$

Уравнение динамики (9) обладает двумя симметриями, имеющими производящие функции y_1 и функцию

$$\begin{aligned} \varphi &= (6f_3y_1^3 + 18f_3y_0y_1y_2 + 3f_3y_0^2y_3 + 6f_2y_1y_2 + 2f_2y_0y_3 + f_1y_3) \text{ mod } \langle DF \rangle = \\ &= \frac{3f_3y_1(18f_3^2y_0^4y_1^2 - 4f_3y_0^3(b_2 - 6f_2y_1^2)) + (12f_1f_3y_1^2 + 8f_2^2y_1^2 - 4b_2f_2)y_0^2}{(3f_3y_0^2 + 2f_2y_0 + f_1^2)^2} + \\ &\quad + \frac{3f_3y_1(-4f_1y_0(b_2 - 2f_2y_1^2)) + b_1 + 2f_1^2y_1^2}{(3f_3y_0^2 + 2f_2y_0 + f_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что если $f_3 = 0$, то производящая функция равна нулю и поэтому соответствующее векторное поле S_φ - нулевое. Поэтому невозможно построить нетривиальное

преобразование сдвига вдоль его траекторий и в этом случае метод конечномерных динамик не применим.

Заметим, что по теореме Ли – Бьянки [8] уравнение (9) может быть проинтегрировано в квадратурах при $f_3 \neq 0$.

Пример 2 В качестве иллюстрации применения динамик второго порядка рассмотрим уравнение (1) в случае когда $f(u) = -u^3$. Тогда $f_0 = f_1 = f_2 = 0$, а $f_3 = -1$, поэтому

$$F = y_2 - \frac{b_1}{9y_0^5} - \frac{b_2}{9y_0^2} = 0.$$

Положим $b_1 = b_2 = 0$, то есть рассмотрим тривиальную динамику $y_2 = 0$. Её решениями являются линейные функции $y(x) = ax + b$. Ограничение производящей функции на динамику имеет вид:

$$\varphi = (-6y_1^3 - 18y_0y_1y_2 - 3y_0^2y_3) \bmod \langle DF \rangle = -6y_1^3.$$

и векторное поле тасующих симметрий

$$S_\varphi = -6y_1^3 \frac{\partial}{\partial y_0}.$$

Преобразование сдвига вдоль его траекторий имеет вид

$$\Phi_t: (x, y_0, y_1) \rightarrow (x, y_0 + 6y_1^3t, y_1).$$

Действуя обратным преобразованием Φ_t^{-1} на вектор $(y_0 - ax - b, y_1 - a)$, получим вектор $(y_0 + 6y_1^3t - ax - b, y_1 - a)$, откуда находим двухпараметрическое семейство решений

$$u(t, x) = -6a^3t + ax + b$$

уравнения (1), которое в этом примере имеет вид

$$u_t + 6u_x^3 + 18uu_xu_{xx} + 3u^2u_{xxx} = 0.$$

5 Код Maple вычисления динамик

Здесь приводится код, написанный на языке системы символьных вычислений Maple для вычисления динамик второго порядка (см. раздел 4).

Подключение библиотек:

```
with(DifferentialGeometry):with(JetCalculus):with(Tools):with(PDETools):with(DETools):with(Plot):with(plots):
```

```
Preferences("JetNotation", "JetNotation2"); with(LinearAlgebra):
```

Задание координат и порядка джетов:

```
DGsetup([x], [y], M, 5):
```

Процедура вычисления скобки Пуассона:

```
Poisson:= proc (A, B)
```

```
local i, P;
```

```
P:=0:
```

```
for i from 0 to 3 by 1 do P:=P+(diff(A, y[i])*TotalDiff(B, [i])-diff(B, y[i])*TotalDiff(A, [i])) end do:
```

```
return P:
```

```
end proc:
```

Задание функции f:

```
f:=y->f3*y^3+f2*y^2+f1*y+f0;
```

Формирование производящей функции:

```
ur:=diff(f(y(x)),x$3);
```

```
phi:=convert(ur,DGjet);
```

Формирование функции F:

```
F:=y[2]-A(y[0])*y[1]-B(y[0]);
```

Вычисление скобки Пуассона:

```
eq0:=convert(Poisson(phi,F),diff);
```

Ограничение скобки Пуассона на динамику:

```
sub:=solve([F>TotalDiff(F,[1]),TotalDiff(F,[2]),TotalDiff(F,[3])],{y[2],y[3],y[4],y[5]}):
```

```
eq1:=simplify(eval(eq0,sub),size);
```

В результате получена система дифференциальных уравнений **eq1** для нахождения функций А и В. Её решение осуществляется в полуавтоматическом режиме.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 18-29-10013, А.Г. Кушнер).

Литература

1. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 472, № 6. — С. 627–630.
2. *Кушнер А. Г., Мачоган О. Ю.* Динамика эволюционных уравнений третьего порядка // Материалы весенней научной сессии преподавателей кафедры геометрии математического факультета МПГУ и кафедры алгебры и геометрии факультета естественных наук университета им. Палацкого в Оломоуце. — МПГУ Москва, 2017. — С. 32–34.
3. *Kruglikov B. S., Lychagina O. V.* Finite dimensional dynamics for Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov equation // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2005. V. 19. (2005), P. 13–28.
4. *Kushner A., Matviichuk R.* Exact solutions of the Burgers – Huxley equation via dynamics // *Journal of Geometry and Physics*. – 2020. – Vol. 151. – P.1–12.
5. *Kushner A., Matviichuk R.* Finite dimensional dynamics and exact solutions of Burgers – Huxley equation // 2019 Twelfth International Conference Management of large-scale system development (MLSD). — IEEE Piscataway, NJ, United States, 2019.
6. *Kushner E., Kushner A., Samohin A.* Differential invariants of third order evolutionary non-linear pdes // 2019 Twelfth International Conference Management of large-scale system development (MLSD). — IEEE Piscataway, NJ, United States, 2019.
7. *Lychagin V.V., Lychagina O.V.* Finite Dimensional Dynamics for Evolutionary Equations, *Nonlinear Dyn.*, 48 (2007), 29-48.
8. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and non-linear differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
9. *Salnikov A., Akhmetzyanov A., Kushner A., Lychagin V.* A numerical method for constructing attractors of evolutionary filtration equations // 2019 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). — IEEE, 2019. — P. 22–24.
10. *Kushner A., Kushner E., Matviichuk R.* Dynamics and exact solutions of linear PDEs // Proc, Algebraic and Geometric Methods of Analysis, Odesa, 26-30 May 2020. P. 36-37.
11. *Gorinov A., Kushner A.* Dynamics of Evolutionary PDE Systems // *Lobachevskii Journal of Mathematics* 2020 (in press).