

DOI:

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ МНОГОФАКТОРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Куракин П. В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

pvkurakin@yandex.ru

Аннотация: Задача управления в многофакторной социально – экономической системе рассматривается как необходимость однократного или многократного воздействия на значения величин факторов и связей между факторами, с целью получить более предпочтительные траектории развития таких систем.

Ключевые слова: математическое моделирование, многофакторное взаимодействие, полуколичественные методы.

Введение

Рассматривается дискретная полуколичественная модель сложного взаимодействия факторов в экономике. Исходный вариант модели и анализ ее линеаризованного случая рассмотрен [1 - 3]. В данном докладе рассматривается строго нелинейный вариант модели.

В основе модели лежит представление об определенном наборе социально-экономических факторах, которым приписывается некоторое количественная величина, называемая балльной оценкой. Важно понимать, что данная величина, хоть и выражается целым числом, не является обычной количественной мерой аддитивного типа. Например, ВВП страны, измеримый в национальной валюте, или абсолютная численность населения – это обычные количественные мера. Балльная оценка фактора не тождественна его абсолютной величине в тех или иных объективных (измеримых) единицах измерения. В отличие от такой объективно измеримой меры, балльная оценка – субъективное мнение эксперта, она является условной величиной, которая имеет смысл не сама по себе, а в контексте всех других оценок такого же класса.

В модели факторы связаны между собой: на каждый фактор оказывает воздействия некоторая совокупность других факторов, при этом каждая бинарная связь между факторами также описывается целочисленной балльной оценкой.

Такая система эволюционирует в дискретном времени, то есть по шагам. На каждом шаге балльная оценка каждого фактора обновляется в соответствии со значениями тех факторов, которые связаны с данным, и значениями связей (см. далее). Также, воздействию одного фактора на другой (то есть, соответствующей связи) можно приписать не только численное (балльное) значение интенсивности этой связи, но и временную характеристику запаздывания действия этой связи, выражаемую также целым числом. Это число показывает, на сколько шагов по времени данное воздействие, оказывающее влияние на целевой фактор, отстает от текущего значения воздействующего фактора. Важно отметить, что величины (балльные значения, интенсивности) связей в ходе эволюции не меняются – мы рассматриваем их как некие объективные характеристики всей социально-экономической среды.

Систему можно рассматривать как автономную – при этом по дискретным временным шагам происходит эволюция системы. Но мы также можем рассматривать задачу управления развитием системы. Поскольку факторы и связи между ними имеют социально – экономический смысл, то и управлению мы должны придать некоторую социально – экономическую трактовку, и увязать эту трактовку с формализмом системы.

Далее, под управлением мы будем понимать любые «внешние» изменения балльных значений факторов, как однократные (на одном временном шаге), так и многократные и длительные (на нескольких временных шагах, или вообще на протяжении всей эволюции системы). Это первичный уровень управления. В социально – экономическом смысле такое управление можно трактовать как «ручное».

Другой способ управления – менять численные величины связей между факторами. Более того, можно «отключать» и «включать» существующие связи. Такое управление можно трактовать как «структурное».

Какие цели можно рассматривать как желательные при том или ином управлении системой?

Как показали многочисленные вычислительные эксперименты, все траектории при любых начальных данных выходят на некоторые аттракторы. Эти множества действительно являются аттракторами, так как (опять же – по результатам вычислительного эксперимента) к каждому

аттрактору всегда сходится более чем одна траектория. Размерность аттрактора равна числу динамических переменных (факторов) в модели, в нашем случае – 36. Аттрактор представляет собой колебательный цикл: всегда по крайней мере несколько факторов имеют колебательную динамику, хотя другие факторы могут иметь просто постоянное (фиксированное) значение.

Каждому аттрактору можно приписать некоторые характеристики, связанные с тем или иным набором факторов. С практической точки зрения, в социально-экономической сфере чаще представляют интерес не все факторы, а только некоторое их подмножество, которое принято называть «целевыми» факторами. Некоторые из них желательно минимизировать, другие, наоборот – максимизировать. Часто этого не удается достичь в полной мере. В таком случае мы предлагаем в качестве цели управления добиться просто стабилизации этих факторов на аттракторе, так как колебательный режим, даже с хорошим максимальным значением, с экономической точки зрения представляется .

Общее описание системы и ее динамики

В модели в ее текущем виде рассматриваются следующие социально – экономические факторы:

- "GAM" - государственные антикризисные меры,
- "VtO" - внешнеторговые ограничения,
- "RCiT" – регулирование цен и тарифов,
- "SKDP" – смягчение кредитно-денежной политики,
- "KS" - ключевая ставка,
- "KDS" - кредитные и депозитные ставки,
- "RK" – розничное кредитование,
- "IR" – инфляционные риски,
- "UR" - укрепление рубля,
- "M2" – денежная масса,
- "PC" – потребительские цены,
- "PS" – потребительский спрос,
- "PR" – потребительские расходы,
- "ZP" – заработная плата,
- "SR" – сбережения в рублях,
- "KP" - кредитование производства,
- "NZ" - новые заказы,
- "EA" - экономическая активность,
- "ZPM" – загрузка производственных мощностей,
- "IS" – инвестиционный спрос,
- "SvR" – сбережения в рублях,
- "ZRS" – загрузка рабочей силы,
- "NZ" – неполная занятость,
- "VVP" – выпуск. ВВП,
- "RD" - реальные доходы,
- "ChN"- численность населения,
- "PM" – прожиточный минимум,
- "UB" – уровень бедности,
- "DB" – дефицит бюджета,
- "SnI" – спрос на импорт,
- "Ex" - экспорт,
- "ZVIFV" – замещение внешних источников финансирования внутренними,
- "FR" – финансовый рынок,
- "RDN" – рублевая долговая нагрузка,
- "CnE" – цены на энергоносители,
- "VnSh"- внешние шоки,
- "VeK" – внешнеэкономическая конъюнктура

Согласно [1-3], где была предложена настоящая модель, взаимодействия факторов оценивается положительными и отрицательными числами, в балльной системе на некотором интервале $[a_{\min}, a_{\max}]$ В проведенных вычислительных экспериментах считалось, что в этом же диапазоне находятся допустимые значения самих показателей (факторов). Результат независимого примитивного воздействия фактора j на фактор i описывается формулой специфического логического умножения:

$$(1) y_{ij} = a_{ij} \otimes x_j = \min(|a_{ij}|, |x_j|) \text{sign}(a_{ij} x_j).$$

Здесь под x_j следует понимается текущее (на данном шаге моделирования) балльное значение воздействующего фактора x , a_{ij} - балльное значение одиночного воздействия фактора j на фактор i , y_{ij} - результат воздействия, то есть, новое значение фактора x_i (при условии, что нет других воздействий). Сразу бросается в глаза одна ключевая особенность рассматриваемой модели от привычных дискретных моделей: очередное (по времени) значение каждого фактора не зависит от его собственного текущего значения. Такую особенность можно было бы подвергнуть острой критике, если бы речь шла о величинах, измеримых в объективных физических или натуральных шкалах. Однако здесь мы имеем дело с субъективной балльной оценкой, что делает такой принцип обновления величин факторов вполне уместным и оправданным.

Однако в реальности мы всегда имеем ситуацию, когда несколько факторов влияют на данный. В этом случае необходимо различать ситуации так называемых *взаимно дополнительного* и *взаимно компенсирующего* действия факторов.

При взаимно дополнительном воздействии группы факторов g на фактор i для результата требуется воздействие всех факторов группы. Тогда результат определяется как минимальный из всех возможных одиночных воздействий, входящих в группу:

$$(2) y_{ig} = \min_j \{y_{ij}\} \min_{i,j} (\text{sign}(y_{ig})), j \in g.$$

При взаимно компенсирующем воздействии факторов j и k на i , когда для результата достаточно любого из действующих факторов, представляется формулой логической суммы

$$(3) y_{ij} \oplus y_{ik} = \max(|y_{ij}|, |y_{ik}|) \text{sign}(y_{ij} + y_{ik} \pm \varepsilon),$$

где $0 < \varepsilon < 1$ – возможная добавка, позволяющая оценить разброс результатов в результате вычислительной неоднозначности операции sign .

Правила (1) – (3) уместно прокомментировать, объяснить их смысл на вербальном уровне. Тогда социально-экономическая интерпретация этих правил станет мотивированной. Ключевое правило (1) можно трактовать следующим образом. Состояние воздействующего фактора – это некий сосуд определенного объема, а связь с целевым фактором – «труба» с определенной пропускной способностью. Условная «жидкость» воздействия протекает к целевому фактору либо целиком, либо, будучи ограниченной пропускной способностью канала. При этом знак воздействия определяется произведением знаков «ёмкости» и «трубы». Взаимно дополнительное воздействие группы факторов – такое воздействие, при котором нет «несущественных» участников этой группы, и суммарный результат (по модулю) определяется самым «слабым» участником. Взаимно компенсирующее воздействие группы факторов – такое воздействие, при котором один «сильный» фактор оказывается достаточным для воздействия.

Приведем базовые формулы межфакторного взаимодействия, которые использовались в модели.

$$1. \text{GAM} = 3 (\text{IR}) \vee 7 (\text{VhSh}) \wedge -5 (\text{VeK})$$

Эта формула означает следующее. На фактор «Государственные антикризисные меры» действуют факторы «Инфляционные риски», «Внешние шоки» и «Внешнеэкономическая конъюнктура». При этом «Внешние шоки» и «Внешнеэкономическая конъюнктура» объединены в группу, т.е. их воздействие на целевой фактор носит взаимно дополнительный характера, и их совместное воздействие определяется формулой (3). После этого полученное групповое воздействие «суммируется» с воздействием одиночного фактора «Инфляционные риски» по правилу (2). При этом само одиночное воздействие фактора «Инфляционные риски» описывается формулой (1)

Для остальных факторов имеем следующие воздействия:

$$2. \text{VtO} = 4 (\text{GAM}) \wedge (-5) (\text{VeK})$$

$$3. \text{RCiT} = 8 (\text{GAM}) \wedge (-6) (\text{SKDP}) \vee 5 (\text{IR})$$

$$4. \text{SKDP} = (-3) (\text{IR}) \vee 2 (\text{UR}) \vee 5 (\text{VeK})$$

$$5. \text{KS} = (-4) (\text{SKDP})$$

$$6. \text{KDS} = 8 (\text{KS}) \vee 3 (\text{IR})$$

$$7. \text{RK} = (-5) (\text{KDS}) \vee 4 (\text{PS})$$

$$8. \text{IR} = (-3) (\text{SKDP}) \vee (-8) (\text{UR}) \vee 5 (\text{M2}) \vee 3 (\text{RDN}) \vee 7 (\text{VnSh})$$

$$9. \text{UR} = (-4) (\text{IR}) \vee (-5) (\text{M2}) \vee 9 (\text{CnE})$$

$$10. \text{M2} = (-4) (\text{UR}) \vee 6 (\text{Ex})$$

11. PC = (-8) (UR) ∨ 5 (PS)
12. PS = (-4) (PC) ∨ 6 (SvR) ∨ (-8) (UB)
13. PR = (-4) (KDS) ∨ 6 (RK) ∨ 9 (PC) ∨ 9(SvR) ∨ 5(RD)
14. ZP = 4 (ZPM) ∨ 6(VVP)
15. SvR = 9 (ZP)
16. KP = 7 (SvR)
17. NZ = (-8) (KDS) ∨ 6 (ZVIFV) ∨ 4(VeK)
18. EA = 6 (PS) ∨ 4 (PR) ∨ 8 (ZPM)
19. ZPM = 5 (PS) ∨ 6 (KP) ∨ (-5) (RDN)
20. IS = 5 (NZ) ∨ 7 (EA) ∨ (-5) (DB) ∨ (-6) (SnI)
21. ZRS = 8 (NZ) ∨ 7 (IS) ∨ 4 (FR)
22. NZan = 6 (ChN)
23. VVP = 6 (ZPM) ∨ 5 (IS) ∨ 4 (ZRS) ∨ (-3) (Nzan)
24. RD = (-4) (IR) ∨ 5 (ZP) ∧ 5 (ZRS)
25. ChN = 4 (SvR) ∧ (-3) (UB) ∧ (-3) (DB)
26. PM = 7 (SvR)
27. UB = (-7) (RD) ∨ 5 (PM)
28. DB = (-5) (M2) ∨ 3 (ZP) ∨ 5 (SnI) ∨ (-5) (Ex)
29. SnI = 3 (VtO) ∨ 4 (PS) ∨ 5 (SvR) ∨ 5(KP) ∨ (-6) (VVP)
30. Ex = (-5) (VtO) ∨ 7(VVP) ∨ 8(CnE) ∨ 4(VeK)
31. ZVIFV = 5 (GAM) ∨ 8 (VVP) ∨ (-6) (DB) ∨ (-4) (Ex)
32. FR = (-3) (VtO) ∨ (-3) (RCiT) ∨ 4(Ex)
33. RDN = 5 (RK) ∨ 2 (PR) ∨ 5(NZ)
34. CnE = 5 (IR) ∨ 5 (FR)
35. VnSh = (-2) (VeK)
36. VeK = (-6) (VtO) ∨ -6 (SnI) ∨ 6(Ex) ∨ (-5) (VnSh)

На данном этапе исследования модели мы рассматривали уравнения (1) – (3) как вырожденный и упрощенный случай модели. В общем случае необходимо учитывать временное запаздывание в действии одного фактора на другой. При наличии запаздывания уравнения (1) – (3) принимают вид:

$$(1') y_{ij}(t) = a_{ij} \otimes x_j(t - \tau) = \min(|a_{ij}|, |x_j(t - \tau)|) \text{sign}(a_{ij} x_j(t - \tau)),$$

$$(2') y_{ig}(t) = \min_j \{y_{ig}(t)\} \min_{i,j} (\text{sign}(y_{ig}(t))), j \in g,$$

$$(3') y_{ij}(t) \oplus y(t)_{ik} = \max(|y(t)_{ij}|, |y(t)_{ik}|) \text{sign}(y(t)_{ij} + y(t)_{ik} \pm \varepsilon).$$

На Рис. 1а приведены типовые траектории целевых максимизируемых факторов (тех, чья балльная оценка желательна должна быть наибольшей в конце эволюции) без запаздываний. На Рис. 1(б) – эволюция с теми начальными данными, но с запаздыванием. Максимизируемыми принято считать факторы:

1. Неполная занятость;
2. ВВП;
3. Реальные доходы;
4. Численность населения;
5. Прожиточный минимум
6. Экспорт.

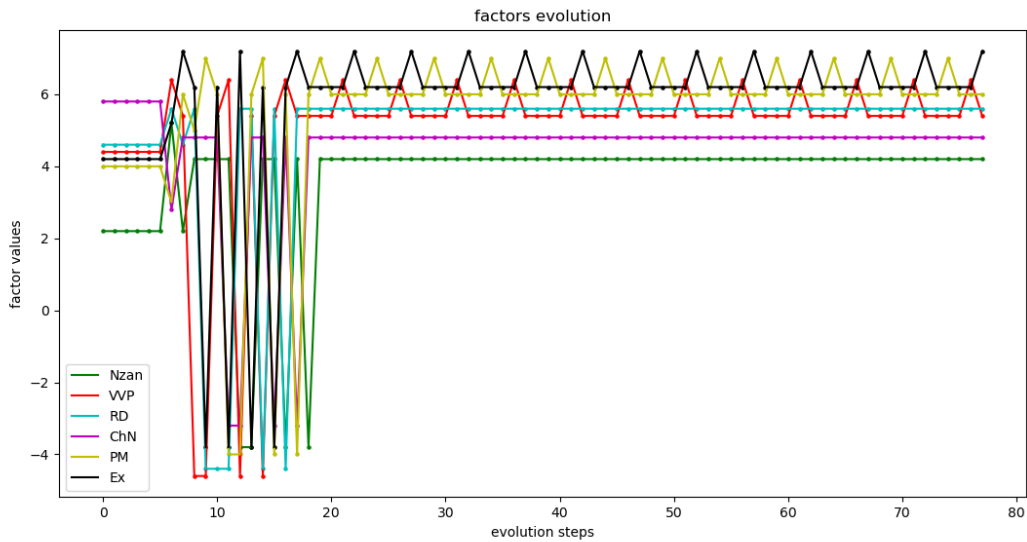


Рис. 1(а) Эволюция целевых максимизируемых факторов без задержек

На Рис. 2(а) приведены типовые траектории целевых минимизируемых факторов (тех, чья балльная оценка желательна должна быть наименьшей в конце эволюции) без запаздывания. Рис. 2(б) – эволюция с теми начальными данными, но с запаздыванием. Минимизируемыми принято считать факторы:

1. Уровень бедности;
2. Дефицит бюджета;
3. Спрос на импорт;
4. Инфляционные риски.

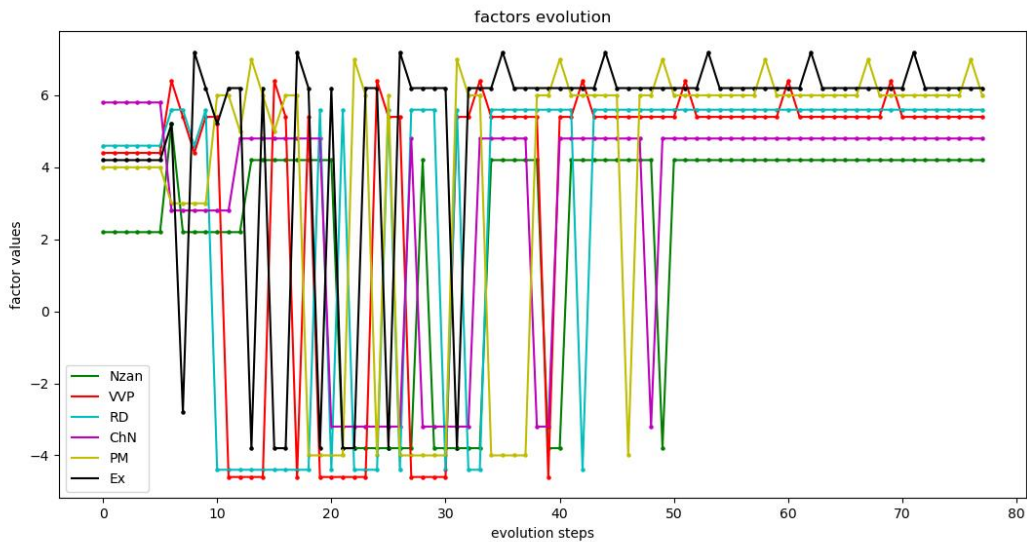


Рис1 (б) Эволюция максимизируемых целевых факторов с задержками

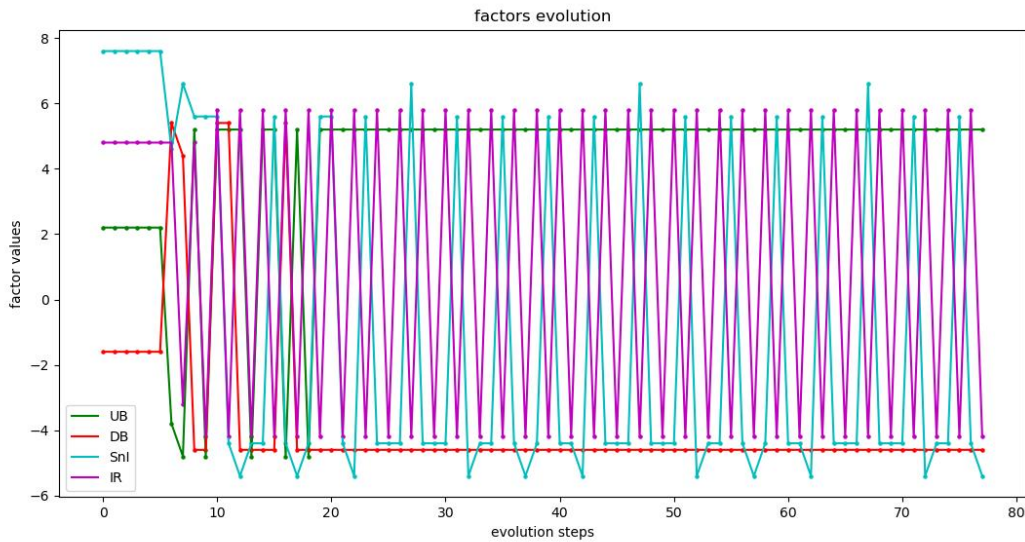


Рис. 2(а) Эволюция целевых минимизируемых факторов без задержек

В приведенных экспериментах величина запаздывания была задана для каждой связи и варьировалась от 0 до 5. В этом случае под начальными данными эволюции следует рассматривать список (массив) векторов длиной 5. Из рисунков 1 и 2 видно, что введение запаздываний в систему связей приводит к увеличению периода стабилизации системы к аттрактору. Однако нельзя сказать, что это общее правило – возможны как траектории, при которых увеличение задержек в уравнениях модели приводит к увеличению периода стабилизации, так и траектории, у которых стабилизация происходит быстрее при увеличении задержек.

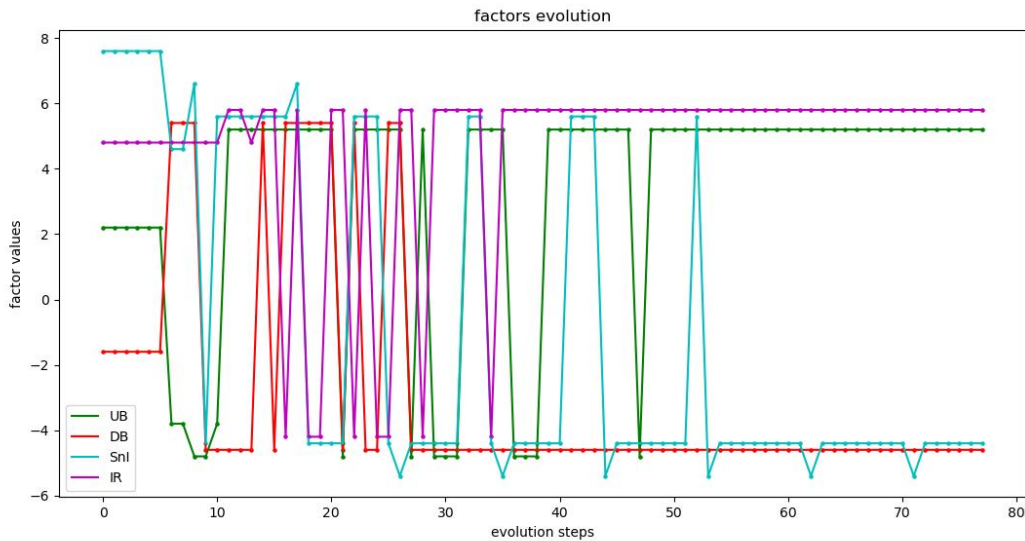


Рис. 2(б) Эволюция минимизируемых целевых факторов с задержками

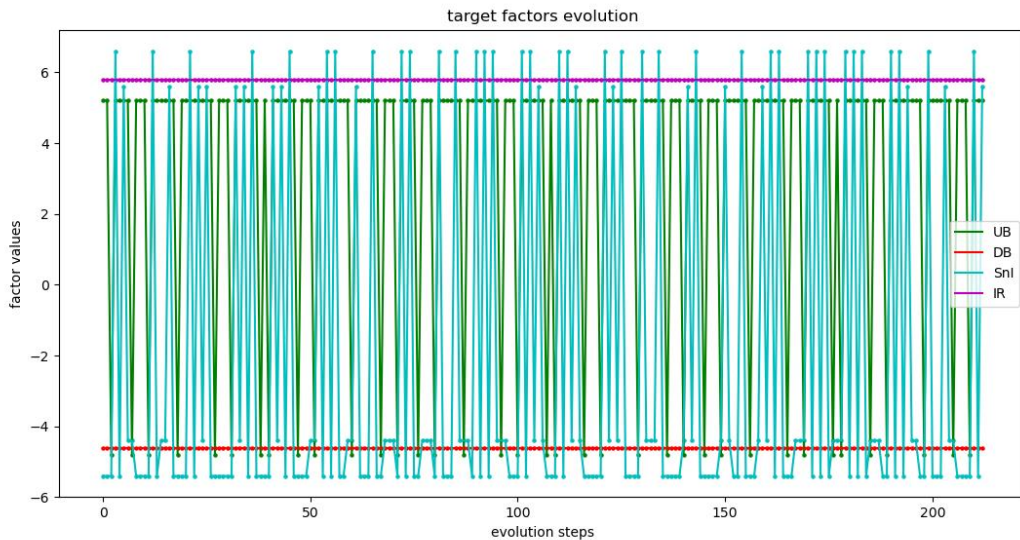


Рис. 3(а). Траектории аттрактора длиной 213 для минимизируемых целевых факторов.

Тем не менее, можно с уверенностью утверждать, что динамика системы (независимо от наличия и величины задержек в уравнениях модели) всегда должна приводить к тому или циклическому аттрактору, в общем случае колебательному – в силу конечности модели. (Та же самая ситуация имеет место в клеточных автоматах с конечным «игровым полем» и конечным числом возможных состояний клеток).

Отметим, что мы говорим об аттракторах ([4]), а не просто циклических траекториях, потому что в подавляющем числе случаев к такой циклической траектории стягивается не одна, а много траекторий (см. раздел 3 доклада).

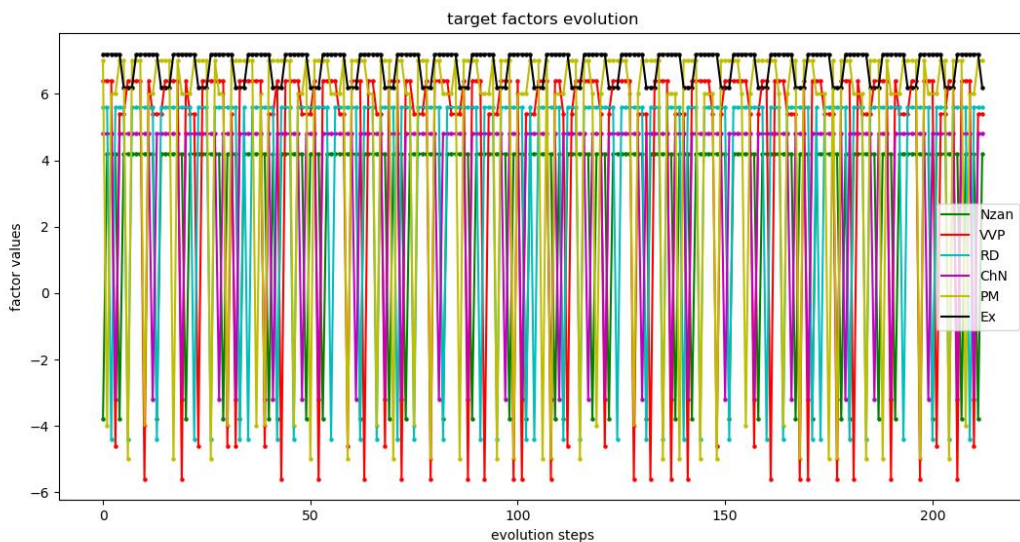


Рис. 3(б). Траектории аттрактора длиной 213 для максимизируемых целевых факторов.

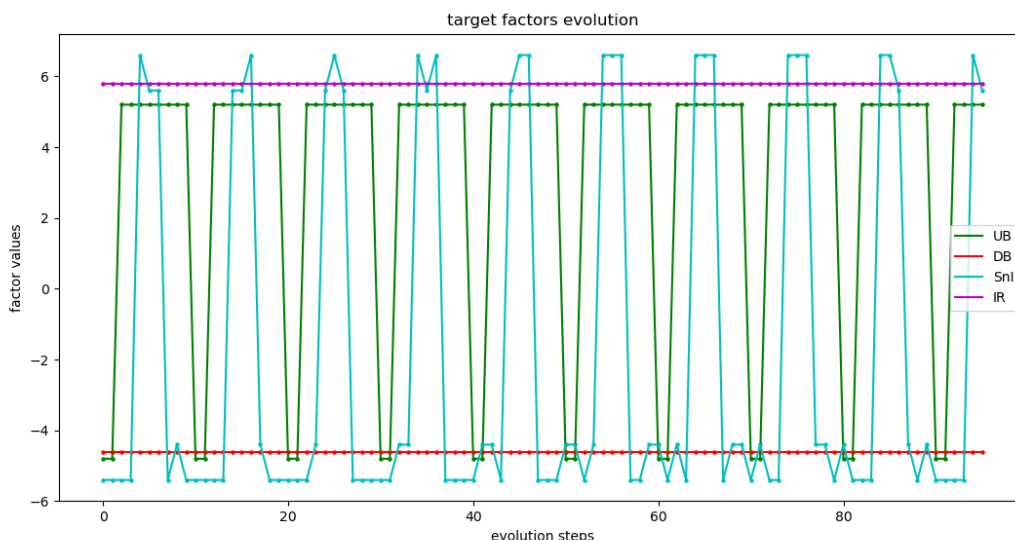


Рис. 4(а). Траектории аттрактора длиной 96 для минимизируемых целевых факторов.

Мы исследовали динамику описанной системы при следующих условиях. Во всех вычислительных экспериментах рассматривался один фиксированный вектор начальных данных из 36 компонентов, со следующими значениями:

"start_values" : { "VtO" : 0, "GAM" : 5, "RCiT" : -2, "SKDP" : 2, "KS" : 3, "KDS" : 1, "RK" : -2, "IR" : 4, "UR" : 3, "M2" : 4, "PC" : -1, "PS" : 7, "PR" : 8, "ZP" : 5, "SvR" : 2, "KP" : 3, "NZ" : -3, "EA" : 4, "ZPM" : 6, "IS" : 4, "ZRS" : 4, "Nzan" : 2, "VVP" : 4, "RD" : 4, ChN" : 5, "PM" : 3, "UB" : 2, "DB" : -2, "SnI" : 7, "Ex" : 3, "ZVIFV" : -4, "FR" : 2, "RDN" : 3, "CnE" : -1, "VnSh" : 1, "VeK" : 2 }.

Далее все компоненты этого вектора варьировались случайным образом в диапазоне +/- 4 (см. подробнее раздел 3 доклада), и запускалась эволюция системы. Всего, во всех наших экспериментах, были найдены аттракторы с длинами: 12, 15, 16, 26, 75, 96, 186, 213. На Рис. 3(а) и Рис. 3(б) приведены траектории описанных выше «целевых» факторов на аттракторе длиной 213.

Видно, что среди минимизируемых факторов только SnI (спрос на импорт) действительно претерпевает цикл длиной 213 дискретных шагов – остальные факторы из этой категории либо вышли на стационарное значение (как инфляционные риски IR и дефицит бюджета DB), либо совершают значительно более короткий цикл (как уровень бедности UB).

Аналогичная ситуация наблюдается для циклического аттрактора длиной 96 (Рис 4(а) и Рис. 4(б)). Здесь все 96 шагов необходимы для факторов «Спрос на импорт» SnI и «ВВП» VVP.

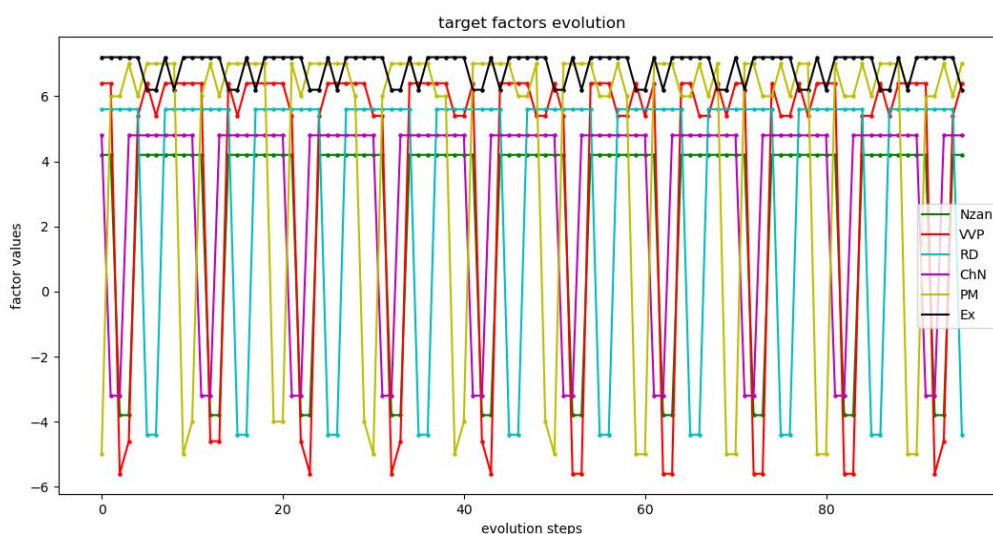


Рис. 4(б). Траектории аттрактора длиной 96 для максимизируемых целевых факторов.

1 Связь задачи управления с аттракторами системы

На текущем этапе исследований мы сконцентрировали наше внимание и фокус вычислительных экспериментов по следующим причинам.

В общем случае задача управления динамической системой состоит в нахождении таких внешних управляющих воздействий, которые приводили систему в требуемое состояние ([5]). В нашей случае речь может идти о внешнем (по отношению к модели) переключении значений тех или иных факторов, с возможным удержанием этих значений в течение некоторого модельного времени.

Здесь можно подойти к вопросу двояко. В вычислительном эксперименте мы можем задавать значения любых факторов. Если мы рассматриваем социально – экономическую интерпретацию модели, то имеет смысл управлять значениями только выделенного набора факторов. Традиционно в макроэкономике принято считать следующие факторы:

- Государственные антикризисные меры ("GAM"),
- Регулирование цен и тарифов ("RCiT"),
- Смягчение кредитно – денежной политики ("SKDP"),
- Ключевая ставка ("KS"),
- Денежная масса ("M2"),
- Рублевая долговая нагрузка ("RDN").

Альтернативный подход может состоять в изменении величин связей между факторами (т.н. структурное управление). Как будет показано ниже (Раздел 3), именно структурное управление имеет большое значение для моделей рассматриваемого класса.

Для введения в модель управления в первом из указанных смыслов необходимо понимать, как вариация значения *управляющего* фактора в начальный момент времени влияет на отклонение *управляемого* фактора в некоторый конечный момент времени, либо среднее отклонение траектории полученного аттрактора от первоначального аттрактора. В случае непрерывных систем, описываемых непрерывными функциями, даже нелинейными, мы можем провести процедуру линеаризации и получить уравнения в вариациях. Но в случае описанных дискретных уравнений, у нас нет такого инструмента. Логический анализ уравнений значительно затруднен в силу большого количества этих уравнений и их взаимной связанности друг с другом: все факторы так или иначе связаны со всеми другими.

Отсюда следует наиболее логичный путь исследования такой «неаналитической» системы, как рассматриваемая система: изучить путем вычислительного эксперимента статистические свойства аттракторов. В частности, представляют интерес полное число и вид аттракторов, размер их притягивающих множеств. Иными словами, следует экспериментально определить свойства чувствительности системы к вариациям начальных значений факторов в качественном и статистическом смысле.

2 Статистические свойства аттракторов системы. Выводы

Исследование свойств аттракторов системы производилось адаптированным к условиям описанной динамической системы методом Монте – Карло [6]. Как отмечено выше, рассматривались траектории, полученные из случайных вариаций начального вектора, описанного в Разделе 2. Генерация начальных векторов проводилась следующим образом.

С заданной вероятностью p значение каждого фактора либо варьировалось, либо оставлялось равным значению в заданном начальном векторе. Если принималось решение о варьировании значения фактора, то к исходному значению добавлялось случайное целое число из диапазона $[-4, 4]$. Таким образом, нулевая добавка тоже рассматривалась.

Все статистические характеристики исследовались отдельно для $p = 0,25$, $p = 0,5$, $p = 0,75$. Для каждого значения вероятности p согласно описанной процедуре создавалось 450000 случайных начальных значений (среди которых попадались повторяющиеся, но в статистике они отсекались), и запускалась эволюция.

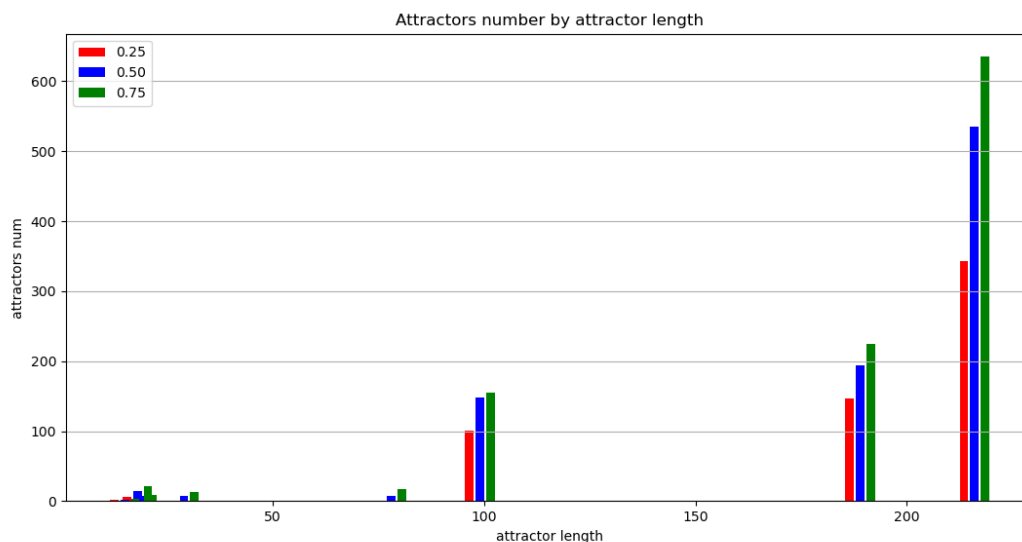


Рис. 5. Распределение аттракторов по их длинам

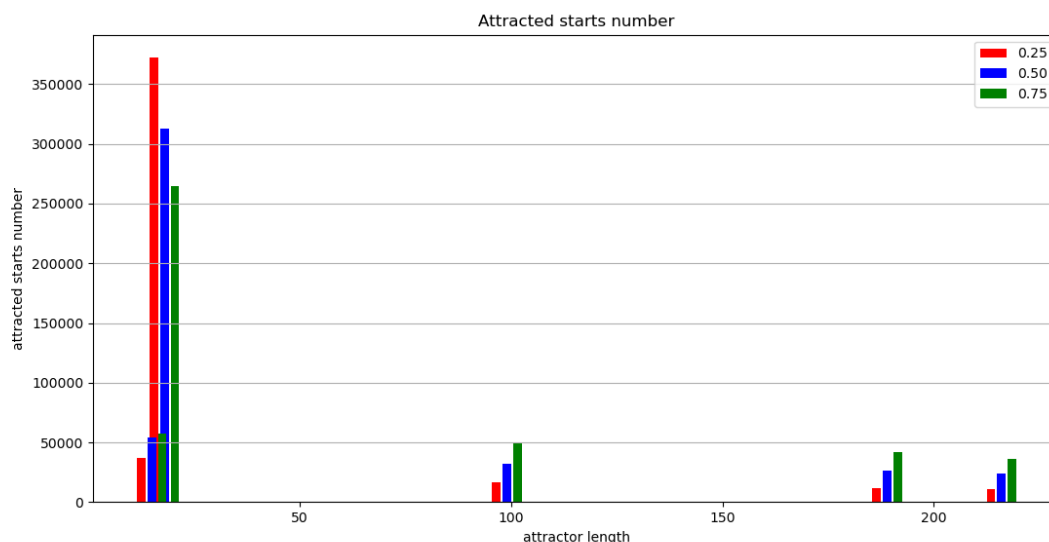


Рис. 6. Распределение аттракторов по размерам притягивающего множества

На Рис. 6 приведено распределение аттракторов, сгруппированных по длине, по размерам притягивающего множества. То есть, подсчитывалось число начальных значений вектора факторов, выходящих на аттракторы того или иного размера.

Сразу можно отметить замечательный контраст с Рис. 6. Мы получили довольно яркий качественный результат: у системы значительно больше длинных аттракторов, чем коротких. Но при этом короткие аттракторы притягивают значительно больше стартовых векторов. Этот результат неплохо подтверждается пошаговым выполнением эволюции заданного начального вектора с «ручным» переключением значений отдельных факторов. Иными словами, *наиболее вероятная* эволюция практически не зависит от начального вектора.

На Рис. 7(а) и Рис. 7(б) приведены распределения числовых значений на векторах произвольно выбранных аттракторов с длинами 186 и 75. Черным указаны значения частот значений межфакторных связей в модели.

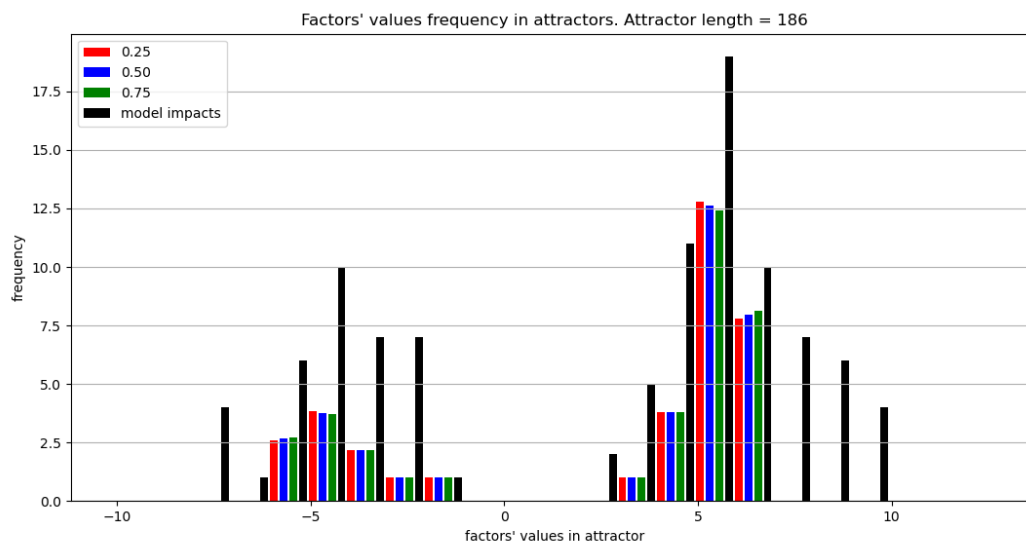


Рис. 7(а). Частота значений факторов на аттракторах длиной 186

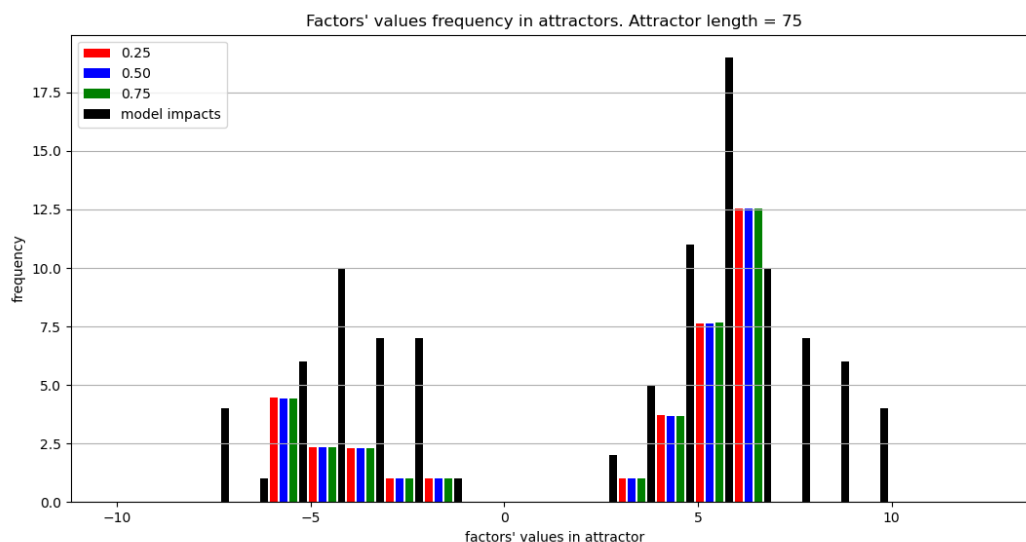


Рис. 7(б). Частота значений факторов на аттракторах длиной 75

Важный вывод из проведенных вычислительных экспериментов и их статистических результатов состоит в следующем. В ходе эволюции системы происходит конкуренция и «выживание» различных значений факторов и величин связей между факторами: каждое правило из уравнений (1) – (3) состоит в выборе либо минимального, либо максимального значения из нескольких участников взаимодействия. Из этого можно было ожидать, что должны выжить *некоторые* из значений факторов и *некоторые* из значений связей. Как видно из Рис. 6(а) и Рис. 6(б), окончательно (на циклическом аттракторе, к которому сходится траектория) выживают только значения связей.

Этот факт, а также факт огромного размера притягивающего множества для аттракторов длины 15, свидетельствуют о том, что эффективное управление описанной системой наиболее вероятно может быть достигнуто на пути «структурного» управления, т.е. воздействием на значения межфакторных связей.

В заключение отметим, что взгляд на описанную динамическую систему с точки зрения изучения статистических свойств ее аттракторов и их притягивающих множеств подсказан классической работой по теории клеточных автоматов [7].

Литература

1. *Гусев В.Б., Исаева Н.А.* Рефлексивные процедуры анализа экспертных данных // Информационные технологии и вычислительные системы. 2016. № 2. С. 31-35.
2. *Гусев В.Б., Павельев В.В.* Использование непрерывных шкал при оценивании и принятии решений в сложных проблемных ситуациях: научное издание / В.Б. Гусев, В.В. Павельев. – М.: ИПУ РАН, 2013. – 118 с.
3. *Гусев В.Б., Исаева Н.А.* Анализ моделей управления на основе экспертных данных. Москва: ИПУ РАН, 2017. – 116 с.
4. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века: развитие и перспективы. - М., Наука, 1984. - с. 237
5. *Егоров А.И.* Основы теории управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 504 с.
6. *Соболь И. М.* Метод Монте-Карло. — М.: Наука, 1968. — 64 с.
7. *Stephen WOLFRAM.* UNIVERSALITY AND COMPLEXITY IN CELLULAR AUTOMATA. Physica 10D (1984) 1-35