

DOI:

## ОЦЕНИВАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ЗАДАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ БПЛА<sup>1</sup>

Кокунько Ю.Г., Краснова С.А.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,*

*Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д.65*

*juliakokunko@gmail.com, skrasnova@list.ru*

*Аннотация: Разработана процедура синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание центром масс беспилотного летательного аппарата заданной траектории инвариантно по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью в условиях неполной информации о переменных состояния и производных задающих воздействий. Приведены результаты численного моделирования.*

Ключевые слова: БПЛА, слежение, внешние возмущения, наблюдатели состояния и задающих воздействий.

### Введение

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) в нынешних реалиях становятся все более востребованными. При построении системы автоматического управления БПЛА определенные трудности вызывают высокая нелинейность динамической модели объекта управления, наличие параметрических и внешних возмущений, необходимость учитывать проектные ограничения на переменные состояния и управления, а также поддерживать диапазон рабочих режимов в процессе управления полетом, который происходит при существенном изменении внешних факторов.

Вопросы планирования траекторий на плоскости и в пространстве составляют самостоятельную проблему при управлении движением автономных мобильных объектов. Желаемая траектория движения в виде вектора задающих сигналов для путевых координат, как правило, полагается известной при синтезе следящей системы. Однако для формирования и программного управления, и высокоточных алгоритмов управления в форме обратной связи требуется знание производных задающих воздействий старших порядков. Это, в свою очередь, требует либо реального дифференцирования сигналов [1], либо аналитического описания желаемой траектории (в том числе, составления динамического генератора заданий). Операций реального дифференцирования для получения производных старших порядков желательно избегать на практике из-за возбуждения паразитных помех и появления запаздывания. При попытке составить полное аналитическое описание сложного графического маршрута, заданного в пространстве, также возникают определенные трудности, так как известные методы планирования траекторий на основе теории графов и сплайновой интерполяцией имеют высокую вычислительную сложность [2, 3].

В данной работе предлагается альтернативный метод получения информации о производных задающих воздействий по их текущим значениям с помощью динамического наблюдателя. Это алгоритмы, реализуемые в вычислительной среде, не требующие ни реального дифференцирования командных сигналов, ни их аналитического описания.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 описывается модель объекта управления. Ставится задача синтеза закона управления в форме динамической обратной связи, обеспечивающего отслеживание с заданной точностью выходными переменными заданных сигналов, определяющих заданную траекторию пространственного движения центра масс БПЛА. Генератор внешних возмущений (неучтенных в модели объекта сил) в построения не вводится. Возмущения являются согласованными и полагаются неизвестными, ограниченными функциями времени. В разделе 2 в рамках блочного подхода разработан базовый закон комбинированного управления в предположении, что все переменные состояния, задающие воздействия и их производные до второго порядка известны. В качестве стабилизирующей составляющей используются S-образные, нелинейные и всюду ограниченные сигмоидальные управления, обеспечивающие  $\varepsilon$ -инвариантность по отношению к ограниченным возмущениям [4, 5].

В третьем разделе решаются проблемы информационного обеспечения базового закона управления. В предположении, что прямым измерениям доступны только выходные пространственные координаты и их задающие сигналы, разработана двухконтурная подсистема наблюдения, включающая два динамических наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-01-00846А, 20-01-00363А).

[5 - 8]. Первый наблюдатель служит для оценивания скоростей пространственных координат по измерениям их положений. Синтез второго наблюдателя (динамического дифференциатора задающих воздействий) составляет основной результат данной работы. Он строится на основе виртуальной канонической модели вход–выход с неизвестным ограниченным входом, его динамический порядок равен порядку производных задающих воздействий, необходимых для синтеза обратной связи. Выходом является вектор текущих значений задающих сигналов. На основе метода разделения движений разработана каскадная процедура синтеза кусочно-линейных корректирующих воздействий наблюдателя, обеспечивающая оценивание производных задающих воздействий с заданной точностью за заданное время.

В разделе 4 представлены результаты моделирования, подтверждающие эффективность разработанных алгоритмов синтеза динамической обратной связи.

## 1 Модель объекта управления. Постановка задач

Рассматривается математическая модель пространственного движения центра масс (материальной точки) БПЛА в траекторной системе координат, представленная в нормальной форме [5, 9]

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ag + \eta + B(\theta, \Psi)u, \end{aligned}$$

где  $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T \in R^3$  – вектор пространственных координат центра масс (выходные, измеряемые и регулируемые переменные) с элементами  $x_{11} := L$  – продольная дальность,  $x_{12} := H$  – высота,  $x_{13} := Z$  – боковое смещение;  $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T \in R^3$  – вектор скорости пространственных координат с элементами

$$(2) \quad x_{21} := V \cos \theta \cos \Psi, x_{22} := V \sin \theta, x_{23} := -V \cos \theta \sin \Psi,$$

где  $V$  – путевая скорость,  $\theta$  – угол наклона траектории,  $\Psi$  – путевой угол;  $g$  – ускорение свободного падения,  $a = (0; -1; 0)^T$ ;  $u = (u_1, u_2, u_3)^T \in R^3$  – вектор управления, элементы которого  $u_1 = gn_x$ ,  $u_2 = gn_y \cos \gamma$ ,  $u_3 = gn_y \sin \gamma$  выражены через продольную  $n_x$  и поперечную  $n_y$  перегрузки, а также угол крена  $\gamma$  вектора перегрузки,  $|\gamma| < \pi$ ;  $\eta(t)$  – вектор внешних детерминированных возмущений;

$$(3) \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \Psi & -\sin \theta \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \Psi & \sin \theta \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix}, \det B \equiv 1, B^{-1} = B^T.$$

Учитывая, что в режиме полете справедливы неравенства  $V > 0$ ,  $|\theta(t)| < \pi/2$ ,  $|\Psi(t)| < \pi/2$ ,  $t \geq 0$ , из (2) следуют обратные соотношения:

$$(4) \quad V = \sqrt{x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2}, x_{21}^2(t) + x_{23}^2(t) \neq 0, \\ \sin \theta = \frac{x_{22}}{V}, \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{x_{22}^2}{V^2}}, \cos \Psi = \frac{x_{21}}{V \cos \theta}, \sin \Psi = -\frac{x_{23}}{V \cos \theta}.$$

Для системы (1) рассматривается проблема отслеживания выходными переменными  $x_1(t)$  заданных сигналов  $\chi(t) = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)^T$  в следующих предположениях:

- прямым измерениям доступны только траекторные координаты  $x_1(t)$ , шумы в измерениях отсутствуют;
- аналитический вид задающих воздействий  $\chi(t)$  не известен, имеются только их текущие значения, как следствие, текущие значения скоростей и ускорений задающих воздействий не известны;
- автономные динамические модели, порождающие внешние воздействия, в построения не вводятся, элементы векторов  $\eta(t)$ ,  $\dot{\chi}(t)$ ,  $\ddot{\chi}(t)$ ,  $\ddot{\chi}(t)$  полагаются неизвестными функциями времени, нормы этих векторов ограниченными известными константами:

$$(5) \quad |\eta(t)| \leq N, |\chi^{(j)}(t)| \leq Y_j, t \geq 0, j = 1, 3,$$

здесь и далее под обозначением  $|\ast|$  следует понимать евклидову норму вектора.

Задача планирования пространственной траектории является самостоятельной проблемой и в данной работе не рассматривается. Предполагается, что задающие воздействия заданы корректно и их параметры являются допустимыми для отработки конкретным БПЛА, а именно

$$(6) \quad |\chi^{(j)}(t)| \leq Y_j < X_j, t \geq 0, j = 1, 2,$$

где  $|x_1^{(j)}(t)| \leq X_j$  – проектные ограничения конкретного БПЛА.

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей стабилизацию ошибок слежения  $e_1(t) = x_1(t) - \chi(t)$ . При отсутствии внешних возмущений  $\eta(t) \equiv \vec{0}$  в замкнутой системе требуется обеспечить экспоненциальную сходимость центра масс БПЛА к заданной пространственной кривой с заданной скоростью, а именно:

$$(7) \quad |e_1(t)|_{t \rightarrow +\infty} = O(\exp(-k_1 t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e_1(t) = 0, k_1 = \text{const} > 0.$$

Поскольку в условиях штормовых возмущений выполнение летних заданий приведет к катастрофе, постольку внештатные ситуации здесь не рассматриваются. В условиях действия внешних неконтролируемых возмущений, допустимых для планируемых режимов полета (5), а именно,

$$N < U, |u(t)| \leq U, t \geq 0,$$

в замкнутой системе требуется обеспечить стабилизацию ошибок слежения с заданной точностью

$$(8) \quad |e_1(t)| \leq \delta_1 + \mu_1(t), 0 < \mu_1 = O(\exp(-k_1 t)),$$

что обеспечит экспоненциальную сходимость ошибок слежения с заданной скоростью в указанную область, а при  $t > T > 0$  – движение центра масс БПЛА в малой окрестности заданной пространственной траектории.

Данная задача включает:

- 1) синтез базового (т.е. в предположении, что все переменные состояния и производные задающих воздействий доступны для измерений) закона управления, обеспечивающего  $\varepsilon$ -инвариантность по отношению к внешним возмущениям (8), а при их отсутствии – экспоненциальную сходимость в нуль ошибки слежения (7);
- 2) синтез подсистемы наблюдения для оценивания неизмеряемых сигналов, необходимых для формирования обратной связи.

В следующем разделе представлена декомпозиционная процедура синтеза базового закона управления, выполненная в рамках блочно подхода.

## 2 Базовый закон управления

Объект управления, модель которого представлена в блочно-канонической форме «вход – выход» (1), является управляемым. Для синтеза базового закона управления целесообразно использовать блочный подход [4, 5, 8], который в отличие от стандартных методов позволяет установить заданные темпы стабилизации ошибок слежения (7) на этапе синтеза.

С этой целью запишем первое уравнение системы (1) относительно ошибки слежения  $\dot{e}_1 = x_2 - \dot{\chi}$ , где переменная  $x_2$  трактуется как фиктивное управление и выбирается в виде  $x_2 = -k_1 e_1 + \dot{\chi}$ , где  $k_1 = \text{const} > 0$  – заданный коэффициент усиления (7). Тогда задача синтеза сводится к выбору истинного управления, обеспечивающего стабилизацию невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением:

$$(9) \quad e_2 = x_2 - \dot{\chi} + k_1 e_1, e_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})^T.$$

В результате невырожденной замены переменных (9) получим систему с замкнутыми локальными связями:

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \\ \dot{e}_2 &= q(x_2, \dot{\chi}, \ddot{\chi}) + \eta + B(\theta, \Psi)u, \end{aligned}$$

где  $q(x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2) = ag - \ddot{x}_2 + K_1 \dot{e}_1 = ag - \ddot{x}_2 + k_1(x_2 - \dot{x}_2)$ .

Также как и в исходной системе (1), в преобразованной системе (10) внешние возмущения  $\eta(t)$  действуют в пространстве управления (т.е. являются согласованными) и их влияние можно подавить с помощью «силовых» методов управления. Классические методы (разрывные управления с организацией скользящего режима и глубокие обратные связи) в данном случае неприменимы из-за физических ограничений на перегрузки, которые в системе управления БПЛА выполняют двойную функцию. В рассматриваемой механической системе (1) они выступают в качестве управляющих воздействий, а для исполнительных устройств они служат задающими воздействиями. Задача отработки исполнительными устройствами задающих сигналов, сформированных в системе (10), здесь не рассматривается, но очевидно, что они должны быть гладкими и ограниченными.

Этими качествами в совокупности со способностью подавить действие внешних возмущений с заданной точностью обладают нелинейные, непрерывные, всюду ограниченные управления в виде сигма функции

$$\sigma(kx) = 2/(1 + e^{-kx}) - 1, \quad x \in R, \quad k = \text{const} > 0,$$

которая имеет S-образную форму и является гладкой аппроксимацией функции знак  $y = \text{sign} x$  в следующем смысле:  $\sigma(-kx) = -\sigma(kx)$ ,  $\sigma(kx) \sim kx/2$ ,  $\sigma(kx) \sim \text{sign} x$ . S-образную функцию  $\sigma(kx)$  с помощью точек  $\sigma(\pm 3) \approx 0,9$ , в которых ее кривизна достигает максимума, можно разделить на следующие зоны:

- если  $|x| \leq 3/k$ , то она близка к линейной функции, при этом  $k|x|/3 \leq |\sigma(kx)| \leq \sigma(3) \approx 0,9$ ;
- если  $|x| > 3/k$ , то она близка к постоянной, при этом  $0,9 \approx \sigma(3) < |\sigma(kx)| < 1$ .

Используем сигма функции в законе комбинированного управления системой (10) в качестве стабилизирующих составляющих:

$$(11) \quad u = -B^T(\theta, \Psi)(m_2 \sigma(k_2 e_2) + q(x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2)), m_2, k_2 = \text{const} > 0,$$

где  $\sigma(k_2 e_2) = (\sigma(k_2 e_{21}), \sigma(k_2 e_{22}), \sigma(k_2 e_{23}))^T$ , с целью обеспечить в замкнутой системе (10), (11) вида

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \\ \dot{e}_2 &= -m_2 \sigma(k_2 e_2) + \eta \end{aligned}$$

свойства, близкие к свойствам систем, функционирующих в скользящем режиме, путем настройки параметров  $m_2, k_2$ .

Если  $|e_2(0)| \gg 3/k_2$ , то тогда выбором амплитуды  $m_2 > 0$  нужно за конечное время обеспечить попадание в «линейную» зону, граница которой (точность стабилизации невязок) определяется выбором коэффициента наклона  $k_2 > 0$ :

$$(13) \quad |e_2(t)| \leq 3/k_2 \leq \delta_2, t \geq T.$$

С учетом указанной нижней оценки сигма функции вне области (13) второе уравнение системы (12) можно представить в виде:  $\dot{e}_2 = -0,9 m_2 \text{sign} e_2 + \eta$ . Тогда из анализа достаточных условий устойчивости получим нижнюю оценку для выбора амплитуды

$$(14) \quad e_2^T \dot{e}_2 = e_2^T (\eta - m_2 \sigma(k_2 e_2)) \leq |e_2| (N - 0,9 m_2) < 0 \Rightarrow m_2 > 1,1N,$$

при которой невязки попадут и останутся в линейной зоне (13). Тогда при

$$(15) \quad t > T: \frac{|e_2(0)| - 3/k_2}{m_2 + N} \leq T \leq \frac{|e_2(0)| - 3/k_2}{0,9 m_2 - N}$$

для решения первого уравнения системы (12) (ошибки слежения) можно дать следующую асимптотическую оценку

$$|e_1(t)| \leq \delta_2 / k_1 + \mu_1(t), t \rightarrow +\infty,$$

что отвечает цели управления (8) при выполнении условия

$$(16) \quad \frac{\delta_2}{k_1} \leq \delta_1 \Rightarrow \delta_2 \leq \delta_1 k_1 \Rightarrow k_2 \geq \frac{3}{k_1 \delta_1}.$$

Верхние границы для выбора параметров управления (14), (16) обусловлены проектными ограничениями на управляющие воздействия и скорость их изменения.

Тот факт, что решение невозмущенной подсистемы  $\dot{e}_2 = -m_2 \sigma(k_2 e_2)$  асимптотически устойчиво, обеспечивает при  $\eta(t) \equiv \vec{0}$  выполнение цели управления (7) при любых  $m_2, k_2 > 0$ .

### 3 Подсистема наблюдения

Для реализации обратной связи (11) с учетом (9) необходимы все переменные состояния объекта управления (1), а также задающие сигналы и их производные до второго порядка включительно. В предположении, что прямым измерениям доступны только пространственные координаты  $x_1(t)$  и их задающие воздействия  $\chi(t)$ , в данном разделе разработана двухконтурная подсистема наблюдения для оценивания неизмеряемых сигналов. Первый наблюдатель строится на основе модели объекта управления (1) и служит для оценивания скоростей пространственных координат  $x_2(t)$ , которые также используются для вычисления синусов и косинусов угла наклона траектории  $\theta(t)$  и путевого угла  $\Psi(t)$  (4), необходимых для реализации  $B^T(\theta, \Psi)$ . Второй наблюдатель строится на основе виртуальной модели и служит для оценивания производных задающих воздействий  $\dot{\chi}(t)$ ,  $\ddot{\chi}(t)$ .

Обе системы, служащие основой для построения наблюдателей, функционируют в условиях неконтролируемых возмущений. Поэтому задача оценивания может быть решена только с заданной точностью при использовании «силовых» корректирующих воздействий. Например, аналогично (14), можно использовать в наблюдателе сигма функции. Но, учитывая, что в задаче наблюдения не накладываются физические ограничения на типы обратных связей, предлагается использовать в качестве корректирующих воздействий более простые в реализации непрерывные, но негладкие кусочно-линейные функции [5–8], которые всюду ограничены. Это является их неоспоримым преимуществом по сравнению с обычными линейными корректирующими воздействиями с большими коэффициентами, которые порождают всплеск оценочного сигнала в начале переходного процесса [8].

#### 3.1 Наблюдатель скоростей пространственных координат

Рассмотрим задачу оценивания вектора скоростей  $x_2(t)$  по измерениям выходных переменных  $x_1(t)$ . Построение дифференциатора в виде динамического наблюдателя представляется более простой и эффективной альтернативой реальному дифференцированию сигналов [1]. Для упрощения структуры наблюдателя и сокращения динамического порядка замкнутой системы мы предлагаем наблюдатель пониженного порядка, построенный как реплика первого уравнения системы (1) в виде

$$(17) \quad \dot{z}_0 = v_0(\varepsilon_0),$$

где  $z_0 \in R^3$  – вектор состояния,  $v_0 = (v_{01}, v_{02}, v_{03})^T$  – вектор корректирующих воздействий наблюдателя,  $\varepsilon_0 = x_1 - z_0$ ,  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \varepsilon_{03})^T$  – вектор ошибок наблюдения.

В отличие от стандартных редуцированных наблюдателей, где отбрасывается динамика измеряемых переменных, здесь, наоборот, для построения наблюдателя мы не использовали динамику неизмеряемых переменных  $x_2(t)$  – второе уравнение системы (1).

Составим уравнение относительно ошибки наблюдения

$$(18) \quad \dot{\varepsilon}_0 = x_2 - v_0,$$

где неизмеряемые переменные рассматриваются как внешние ограниченные возмущения  $|x_2(t)| \leq X_1, t \geq 0$ . Для получения их оценок используем корректирующие воздействия наблюдателя в виде негладких аппроксимаций сигмоидов с помощью непрерывных кусочно-линейных функций

$$(19) \quad v_{0i} = \text{psat}(l\varepsilon_{0i}) = \begin{cases} \text{psign}\varepsilon_{0i}, & |\varepsilon_{0i}| > 1/l; \\ p l \varepsilon_{0i}, & |\varepsilon_{0i}| \leq 1/l, \quad p, l = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Синтез наблюдателя (17), (19) заключается в выборе параметров  $p, l > 0$ , обеспечивающих в виртуальной системе (18) выполнение за заданное время с заданной точностью следующих неравенств:

$$(20) \quad |\varepsilon_0(t)| \leq 1/l \leq \alpha, t > t_0 \geq 0, \\ |x_2(t) - v_0(t)| \leq \alpha, t > t^* > t_0.$$

Полученные оценки  $v_{0i}(t) = x_{2i}(t) \pm \alpha$  будут использованы в законе управления (11) для вычисления невязки  $e_2(t)$  (9) и элементов матрицы  $B^T(\theta, \Psi)$  по формулам (4), а именно:

$$(21) \quad \tilde{V} = \sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2 + v_{03}^2}, \sin \tilde{\theta} = \frac{v_{02}}{\tilde{V}}, \cos \tilde{\theta} = \sqrt{1 - \frac{v_{02}^2}{\tilde{V}^2}}, \cos \tilde{\Psi} = \frac{v_{01}}{\tilde{V} \cos \tilde{\theta}}, \sin \tilde{\Psi} = -\frac{v_{03}}{\tilde{V} \cos \tilde{\theta}}.$$

В силу измерений  $x_1(t)$  в системе (18) можно было бы установить нулевые начальные условия для более быстрой сходимости, но из-за ограничений  $v_{01}^2(t) + v_{03}^2(t) \neq 0$  этого делать нельзя. Поэтому примем нулевые начальные условия в наблюдателе (17):  $z_0(0) = \vec{0} \Rightarrow \varepsilon_0(0) = x_1(0), |x_1(0)| > 1/l$ .

Тогда на начальном этапе система (18), (19) примет вид:

$$\dot{\varepsilon}_0 = x_2 - p \text{sign} \varepsilon_0.$$

Первое неравенство (20) будет обеспечено следующим выбором амплитуды корректирующих воздействий (19) с учетом достаточных условий устойчивости и начальных условий, а именно,

$$(22) \quad \varepsilon^T \dot{\varepsilon} = \varepsilon^T (x_2 - p \text{sign} \varepsilon) \leq |\varepsilon|(X_1 - p) < 0 \Rightarrow p > X_1, p > \frac{|x_1(0)| - \alpha}{t_0} + X_1.$$

Тогда при  $t > t_0$  система (18), (19) примет вид:

$$\dot{\varepsilon}_0 = x_2 - pl\varepsilon_0.$$

Ее собственные движения устойчивые, а на интервале  $[t_0; t^*]$  справедлива следующая оценка:

$$(23) \quad |\varepsilon_0(t_0)| \leq \frac{|x_2(t)|}{pl} + \left( \frac{1}{l} - \frac{|x_2(t)|}{pl} \right) e^{-pl(t^* - t_0)} \leq \frac{X_1}{pl} + \frac{p - X_1}{pl} e^{-pl(t^* - t_0)}.$$

С учетом  $v_0(t) = pl\varepsilon_0(t), t > t_0$ , из (23) получим нижнюю оценку для выбора второго параметра корректирующих воздействий  $l > 0$ , который играет роль большого коэффициента и обеспечивает заданную точность стабилизации ошибки наблюдения, а именно,

$$(24) \quad \varepsilon_0^T \dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0^T (x_2 - pl\varepsilon_0) \leq |\varepsilon_0|(X_1 - pl\varepsilon_0) < 0 \Rightarrow l > X_1/(p\alpha),$$

и выполнение второго неравенства (20):

$$|x_2(t) - v_0(t)| \leq \alpha \Leftrightarrow (p - X_1)e^{-pl(t^* - t_0)} \leq \alpha \Rightarrow l > \frac{1}{(t^* - t_0)p} \ln \frac{p - X_1}{\alpha}.$$

В итоге получим:

$$(25) \quad l > \max \left\{ \frac{X_1}{p\alpha}; \frac{1}{(t^* - t_0)p} \ln \frac{p - X_1}{\alpha} \right\}.$$

Таким образом, при выборе параметров корректирующих воздействий (19) наблюдателя (17) в виде (22), (25) поставленная цель (20) будет достигнута. С ростом параметров  $p, l > 0$  сокращаются время и ошибка оценивания соответственно.

### 3.2 Наблюдатель производных задающих воздействий

Ниже представлен основной результат данной работы. В предположении, что задающие сигналы поступают в реальном времени  $\chi(t) \in R^3$ , ставится задача восстановления их производных  $\dot{\chi}(t), \ddot{\chi}(t) \in R^3$  с помощью дифференциатора, который реализуется в виде динамического наблюдателя [7, 10]. Такой подход является эффективной альтернативой по отношению к реальному дифференцированию сигналов, а также не требует трудоемкого аналитического описания желаемой траектории движения. Наблюдатель строится на основе виртуальной канонической модели 9-го порядка вида

$$(26) \quad \dot{g}_1 = g_2, \dot{g}_2 = g_3, \dot{g}_3 = f(t),$$

где  $g_1(t) = \chi(t) \in R^3$  и в силу априорных предположений  $|g_2(t)| \leq Y_1, |g_3(t)| \leq Y_2$  (5), а вектор-функция  $f(t) \in R^3$  трактуется как внешние, ограниченные возмущения  $|f(t)| \leq Y_3, t \geq 0$ .

Еще раз подчеркнем, что динамическая модель (26) не вводится в контур обратной связи, там реализуется только наблюдатель (динамический дифференциатор), построенный на основе этой модели в виде

$$(27) \quad \dot{z}_1 = z_2 + v_1, \dot{z}_2 = z_3 + v_2, \dot{z}_3 = v_3,$$

где  $z_j \in R^3$  – вектор состояния наблюдателя,  $j = \overline{1,3}$ ,  $v_j = (v_{j1}, v_{j2}, v_{j3})^T$  – его корректирующие воздействия.

Согласно (26), (27) система относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_j = g_j - z_j = (\varepsilon_{j1}, \varepsilon_{j2}, \varepsilon_{j3})^T$ ,  $j = \overline{1,3}$  имеет вид:

$$(28) \quad \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_1, \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - v_2, \dot{\varepsilon}_3 = f(t) - v_3.$$

Подход к оцениванию неизмеряемых сигналов, предложенный в предыдущем подразделе, в данном подразделе распространяется на многомерный случай. По аналогии с (19) вводятся кусочно-линейные корректирующие воздействия наблюдателя (27) в виде

$$(29) \quad v_{li} = p_l \text{sat}(l_i \varepsilon_{li}) = \begin{cases} p_l \text{sign} \varepsilon_{li}, & |\varepsilon_{li}| > 1/l_i; \\ p_l l_i \varepsilon_{li}, & |\varepsilon_{li}| \leq 1/l_i, \quad p_l, l_i = \text{const} > 0; \end{cases}$$

$$v_{ji} = p_j \text{sat}(l_j \varepsilon_{ji}) = \begin{cases} p_j \text{sign} v_{j-1,i}, & |v_{j-1,i}| > 1/l_j; \\ p_j l_j v_{j-1,i}, & |v_{j-1,i}| \leq 1/l_j, \quad p_j, l_j = \text{const} > 0, \quad j = 2, 3, i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Синтез наблюдателя заключается в выборе параметров корректирующих воздействий (29), при которых с заданной точностью за заданное время обеспечивается стабилизация виртуальной системы (28):

$$(30) \quad |\varepsilon_j(t)| \leq \alpha \Rightarrow |g_j(t) - z_j(t)| \leq \alpha, t \geq t^*.$$

При выполнении условий (30) векторные переменные наблюдателя  $z_2(t) = \dot{\chi}(t) \pm \alpha$ ,  $z_3(t) = \ddot{\chi}(t) \pm \alpha$  служат оценками производных задающих воздействий. С учетом (9), (21) закон управления (11) в системе с динамической обратной связью и наблюдателями (17) и (19), (27) и (29) будет реализован в следующем виде:

$$(31) \quad u = -B^T (\tilde{\theta}, \tilde{\Psi}) (m_2 \sigma(k_2(v_0 - z_2 + k_1 e_1)) + q(v_0, z_2, z_3)).$$

Присутствие в оценочных сигналах малых, но незатухающих ошибок  $\alpha$  приведет к некоторому ухудшению точности стабилизации в замкнутой системе невязок  $|e_2(t)| \leq \delta_2 + \varphi(\alpha), t > t^* + T$  (13) и, следовательно, ошибок слежения  $|e_1(t)| \leq (\delta_2 + \varphi(\alpha))/k_1 + \mu_1(t), t \rightarrow +\infty$ .

В отличие от наблюдателя скоростей (17), где нельзя допускать нулевые ошибки наблюдения, в данном случае таких ограничений нет. Используем измеряемый сигнал  $\chi(t)$  для сокращения времени оценивания и установим в системах (28), (29) следующие начальные условия:

$$z_1(0) = g_1(0) \Rightarrow \varepsilon_1(0) = \bar{0}, z_j(0) = \bar{0} \Rightarrow \varepsilon_j(0) = g_j(0), |\varepsilon_j(0)| \leq Y_{j-1}, j = 2, 3.$$

Обозначим  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = t^*$ , тогда желаемое поведение переменных виртуальной системы (28), (29), отвечающее поставленной цели (30), в рамках используемого каскадного подхода [6–8] должно удовлетворять (аналогично (20)) следующим неравенствам:

$$(32) \quad \begin{aligned} 1) & \quad |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1 \leq \alpha, t \geq 0; \\ 2) & \quad |\varepsilon_2(t) - v_1(t)| \leq \Delta_2 < \alpha \Leftrightarrow v_1(t) = \varepsilon_2(t) - \beta_2(t), |\beta_2(t)| \leq \Delta_2, t \geq t_1; \\ 3) & \quad |v_1(t)| \leq 1/l_2 \Leftrightarrow |\varepsilon_2(t)| \leq \Delta_2 + 1/l_2 \leq \alpha, t \geq t_2; \\ 4) & \quad |\varepsilon_3(t) - v_2(t)| \leq \Delta_3 < \alpha \Leftrightarrow v_2(t) = \varepsilon_3(t) - \beta_3(t), |\beta_3(t)| \leq \Delta_3, t \geq t_3; \\ 5) & \quad |v_2(t)| \leq 1/l_3 \Leftrightarrow |\varepsilon_3(t)| \leq \Delta_3 + 1/l_3 \leq \alpha, t \geq t_4. \end{aligned}$$

Нечетные неравенства в (32), которые означают попадание (и нахождение) указанных переменных в линейные зоны соответствующих корректирующих воздействий (29), обеспечиваются выбором амплитуд  $p_j, j = \overline{1,3}$ . Вне линейных зон система (28), (29) представима в виде:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - p_1 \text{sign} \varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - p_2 \text{sign}(\varepsilon_2 - \beta_2), \dot{\varepsilon}_3 = f(t) - p_3 \text{sign}(\varepsilon_3 - \beta_3).$$

Учитывая, что сходимость ошибок наблюдения  $\varepsilon_j(t), j = 2, 3$  в указанные области (32) гарантируется только при  $t > t_{j-1}$ , определим диапазоны их изменения:

$$|\varepsilon_2(t)| \leq E_2 = Y_1 + (E_3 + p_2)t_1, |\varepsilon_3(t)| \leq E_3 = Y_2 + (Y_3 + p_3)t_3, t \geq 0.$$

С учетом полученных оценок из достаточных условий  $\varepsilon_j^T \dot{\varepsilon}_j < 0, j = \overline{3,1}$  аналогично (22) получим неравенства для последовательного (снизу вверх) выбора амплитуд, которые обеспечивают на интервалах  $[t_3; t_4], [t_1; t_2]$  сходимость ошибок наблюдения  $\varepsilon_3(t), \varepsilon_2(t)$  соответственно в указанные области нуля (32), а также выполнение первого неравенства (32):

$$(33) \quad \begin{aligned} p_3 & > \frac{E_3 - \alpha}{t_4 - t_3} + Y_3 \Rightarrow p_3 > \frac{Y_2 + Y_3 t_4 - \alpha}{t_4 - 2t_3}, t_3 < t_4 / 2; \\ p_2 & > \frac{E_2 - \alpha}{t_2 - t_1} + Y_2 \Rightarrow p_2 > \frac{Y_1 + E_3 t_2 - \alpha}{t_2 - 2t_1}, t_1 < t_3 / 2; \\ p_1 & > E_2 = Y_1 + (E_3 + p_2)t_1. \end{aligned}$$

Тогда в указанных интервалах времени виртуальная система (28), (29) представима в виде

$$(34) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 & = \varepsilon_2 - p_1 l_1 \varepsilon_1, t \geq 0; \\ \dot{\varepsilon}_2 & = \varepsilon_3 - p_2 l_2 (\varepsilon_2 - \beta_2), t \geq t_2; \\ \dot{\varepsilon}_3 & = f(t) - p_3 l_3 (\varepsilon_3 - \beta_3), t \geq t_4. \end{aligned}$$

Из достаточных условий устойчивости аналогично (24) получим неравенства для выбора больших коэффициентов наблюдателя, обеспечивающих заданную точность оценивания (30):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 & \leq |\varepsilon_1| (E_2 - p_1 l_1 |\varepsilon_1|) < 0 \Rightarrow l_1 > E_2 / (p_1 \alpha), \\ \varepsilon_2^T \dot{\varepsilon}_2 & \leq |\varepsilon_2| (E_3 - p_2 l_2 (|\varepsilon_2| - \Delta_2)) < 0 \Rightarrow l_2 > E_3 / (p_2 (\alpha - \Delta_2)), \\ \varepsilon_3^T \dot{\varepsilon}_3 & \leq |\varepsilon_3| (Y_3 - p_3 l_3 (|\varepsilon_3| - \Delta_3)) < 0 \Rightarrow l_3 > Y_3 / (p_3 (\alpha - \Delta_3)). \end{aligned}$$

Для выполнения четных неравенств (32) аналогично (23) оценим решения первого и второго уравнения системы (34) на интервалах  $[0; t_1], [t_2; t_3]$  соответственно:

$$|\varepsilon_1(t_1)| \leq \frac{E_2}{p_1 l_1} + \frac{p_1 - E_2}{p_1 l_1} e^{-p_1 l_1 t_1} \Rightarrow |\varepsilon_2(t) - v_1(t)| \leq \Delta_2 \Leftrightarrow (p_1 - E_2) e^{-p_1 l_1 t_1} \leq \Delta_2 \Rightarrow l_1 > \frac{1}{t_1 p_1} \ln \frac{p_1 - E_2}{\Delta_2};$$



$$|\varepsilon_2(t_3)| \leq \frac{E_3}{p_2 l_2} + \Delta_2 + \frac{p_2 - E_3}{p_2 l_2} e^{-p_2 l_2 (t_3 - t_2)} \Rightarrow |\varepsilon_3(t) - v_2(t)| \leq \Delta_3 \Leftrightarrow (p_2 - E_3) e^{-p_2 l_2 (t_3 - t_2)} \leq \Delta_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2 > \frac{1}{(t_3 - t_2) p_2} \ln \frac{p_2 - E_3}{\Delta_3}.$$

С учетом данных оценок приведем последовательность действий при настройке параметров наблюдателя (27), (29), обеспечивающих (32) и, следовательно, цель наблюдения (30):

1) исходя из заданного времени оценивания и с учетом  $t_1 < t_3/2$ ,  $t_3 < t_4/2$ , зафиксировать моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = t^*$ ;

2) выбрать значения амплитуд  $p_j, j = \overline{3,1}$  на основе нижних оценок (33);

3) принять значение  $0 < \Delta_3 < \alpha$  и на основе нижней оценки выбрать

$$(35) \quad l_3 > \frac{Y_3}{p_3(\alpha - \Delta_3)};$$

4) принять значение  $0 < \Delta_2 < \alpha$  и на основе нижней оценки выбрать

$$(36) \quad l_2 > \frac{1}{p_2} \max \left\{ \frac{E_3}{\alpha - \Delta_2}; \frac{1}{t_3 - t_2} \ln \frac{p_2 - E_3}{\Delta_3} \right\};$$

5) и, наконец, выбрать большой коэффициент усиления в первом уравнении (34) на основе нижней оценки

$$(37) \quad l_1 > \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{E_2}{\alpha}; \frac{1}{t_1} \ln \frac{p_1 - E_2}{\Delta_2} \right\}.$$

Обратим внимание, что наблюдатели (17), (19) и (27), (29) функционируют и настраиваются автономно друг от друга, что позволило в обоих случаях задать одинаковую точность и время решения задач оценивания (20), (30).

#### 4 Результаты моделирования

Моделирование разработанных алгоритмов проводилось в среде MATLAB-Simulink. Вначале был протестирован динамический дифференциатор (27), (29) на предмет восстановления производных первого и второго порядка по сигналам различных допустимых задающих воздействий без перенастройки параметров. Моделирование проводилось для двух желаемых траекторий центра масс БПЛА, заданных в виде пространственной спирали и прямой соответственно:

$$(38) \quad 1) \chi_1(t) = 9 \sin(t/9), \chi_2(t) = t + 100, \chi_3(t) = 9 \cos(t/9);$$

$$(39) \quad 2) \chi_1(t) = 3t + 2, \chi_2(t) = t + 100, \chi_3(t) = -2t - 4.$$

Для наихудшего расчетного случая на основе неравенств (33), (35) - (37) были приняты следующие параметры корректирующих воздействий (29):

$$p_1 = 15, p_2 = 10, p_3 = 8; l_1 = 200, l_2 = 200, l_3 = 200,$$

при которых проводилось оценивание производных обоих типов сигналов (38), (39).

На рис. 1 показаны графики ошибок наблюдения задающих воздействий  $\varepsilon_{li}(t) = g_{li}(t) - z_{li}(t)$ ,  $g_{li}(t) = \chi_i(t)$  для спирали (38); на рис. 2 для наглядности показаны графики первых производных заданных сигналов  $g_{2i}(t)$  и результатов их наблюдения  $z_{2i}(t)$ ; на рис. 3 – графики вторых производных заданных сигналов  $g_{3i}(t)$  и результатов их наблюдения  $z_{3i}(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ . На рис. 4 - 6 представлены соответствующие графики для траектории (39).

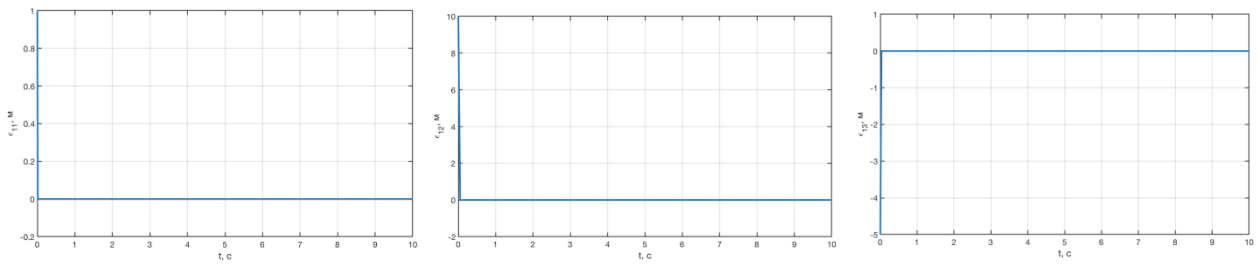


Рис. 1. Графики ошибок наблюдения  $\varepsilon_{1i}(t) = g_{1i}(t) - z_{1i}(t)$  [м] для траектории (38),  $i = \overline{1,3}$

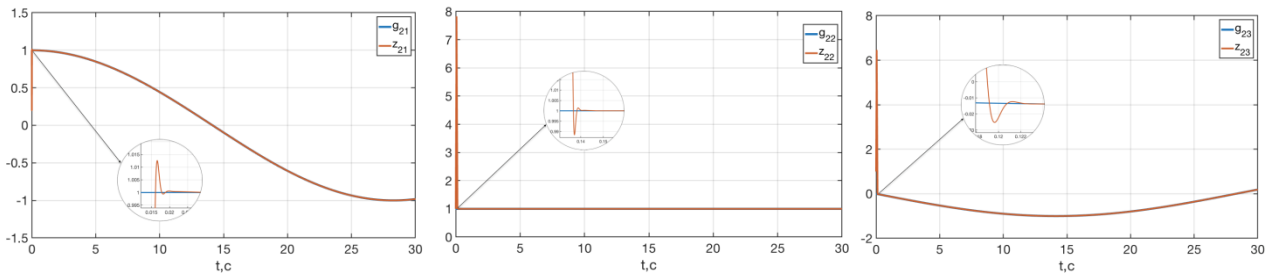


Рис. 2. Графики первых производных задающих воздействий  $g_{2i}(t)$  [м/с] и их оценок  $z_{2i}(t)$  [м/с] для траектории (38),  $i = \overline{1,3}$

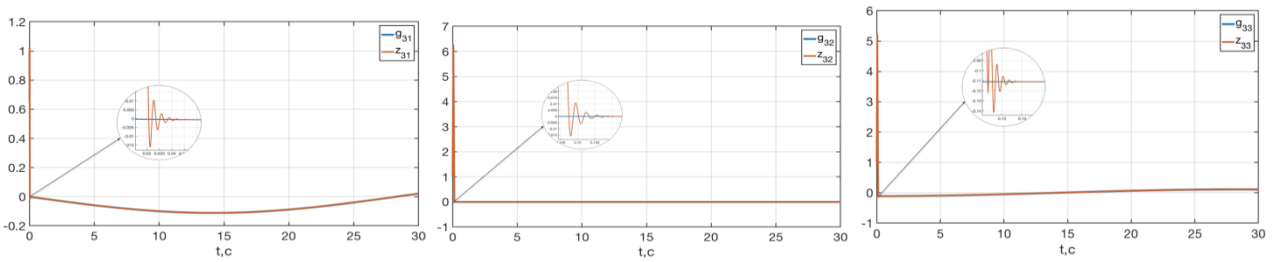


Рис. 3. Графики вторых производных задающих воздействий  $g_{3i}(t)$  [м/с<sup>2</sup>] и их оценок  $z_{3i}(t)$  [м/с<sup>2</sup>] для траектории (38),  $i = \overline{1,3}$

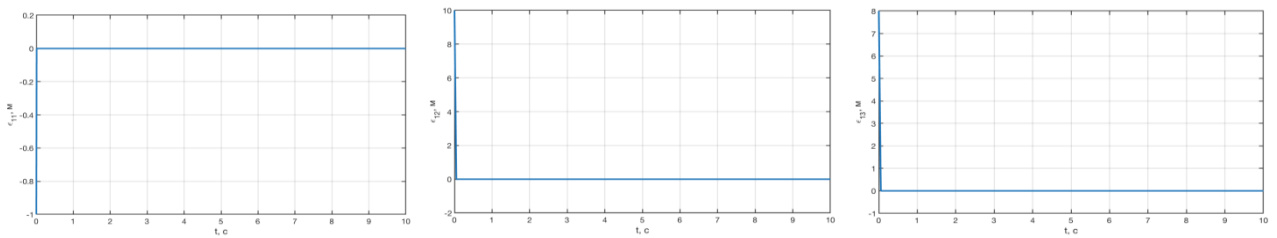


Рис. 4. Графики ошибок наблюдения  $\varepsilon_{1i}(t) = g_{1i}(t) - z_{1i}(t)$  [м] для траектории (39),  $i = \overline{1,3}$

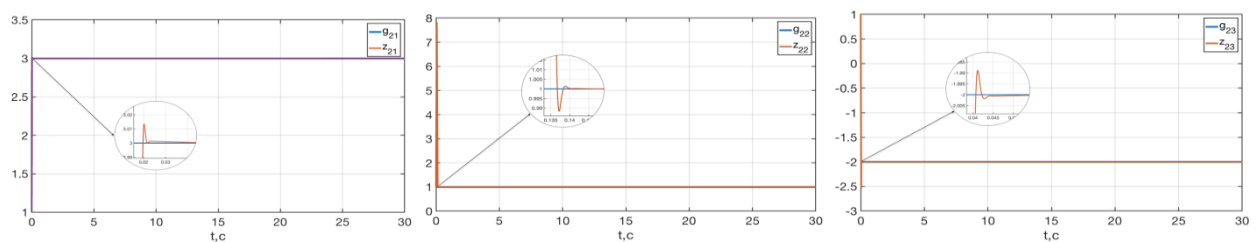


Рис. 5. Графики первых производных задающих воздействий  $g_{2i}(t)$  [м/с] и их оценок  $z_{2i}(t)$  [м/с] для траектории (39),  $i = \overline{1,3}$

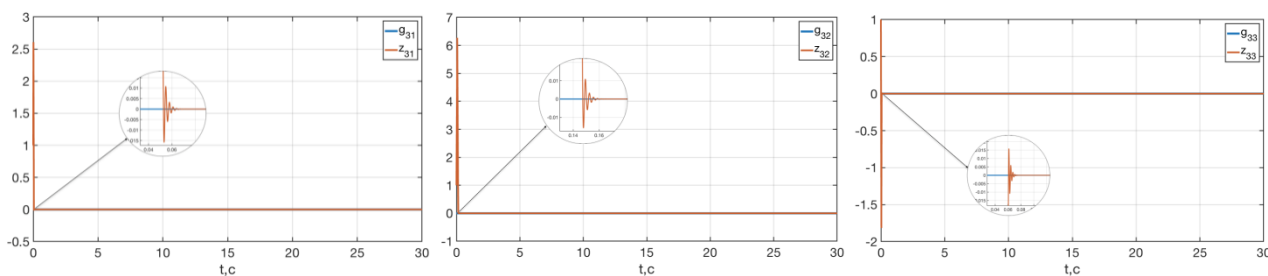


Рис. 6. Графики вторых производных задающих воздействий  $g_{3i}(t)$  [м/с<sup>2</sup>] и их оценок  $z_{3i}(t)$  [м/с<sup>2</sup>] для траектории (39),  $i=\overline{1,3}$

Как видно из рис. 1 – 6, динамический дифференциатор задающих воздействий работает корректно для всех рассмотренных траекторий без перенастройки параметров. Оценочные сигналы сходятся к истинным за 0.2 секунды, ошибки в установившемся режиме пренебрежимо малы.

Для моделирования замкнутой системы далее в качестве задающего воздействия была принята траектория (38). Для системы (1) были приняты следующие начальные условия  $x_1(0) = (0;100;1)^T$  и внешние возмущения:

$$\eta_1(t) = 0.2 \sin t, \quad \eta_2(t) = 0.24 \sin t, \quad \eta_3(t) = 0.9 \cos t.$$

При синтезе базового закона комбинированного управления (11) на основе (7), (13) и (14) были приняты параметры регулятора  $k_1 = 7.5$ ,  $m_2 = 7.4$ ,  $k_2 = 550$ ; при синтезе наблюдателя вектора скорости (17) на основе неравенств (24), (25) были приняты параметры корректирующих воздействий (19) в виде  $p = 8$ ,  $l = 280$ .

На рис. 7 показаны графики ошибок слежения  $e_{li}(t) = x_{li}(t) - \chi_i(t)$  [м],  $i=\overline{1,3}$  в замкнутой системе (1) со статической обратной связью (11) (в предположении, что все переменные состояния, задающие воздействия и их производные до второго порядка известны). На рис. 8 – графики ошибок слежения в замкнутой системе (1) с неполными измерениями, динамической обратной связью (31) и наблюдателями (17), (27). На рис. 9 для случая неполных измерений показан также процесс сходимости центра масс к заданной пространственной траектории (38).

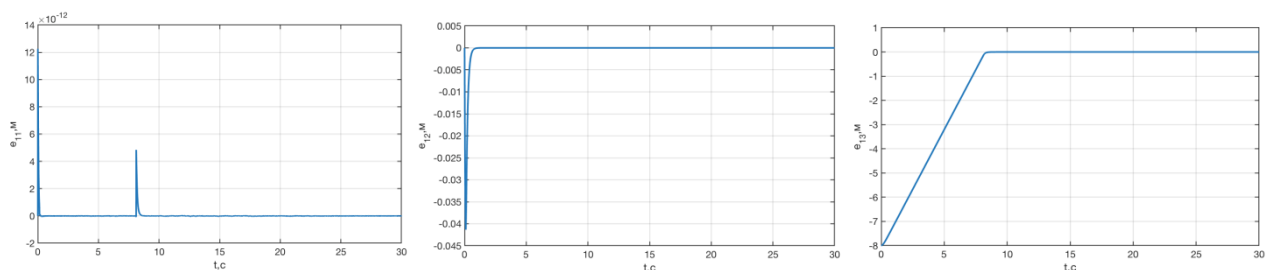


Рис. 7. Графики ошибок слежения  $e_{li}(t) = x_{li}(t) - \chi_i(t)$  [м],  $i=\overline{1,3}$  в замкнутой системе (1) со статической обратной связью (11)

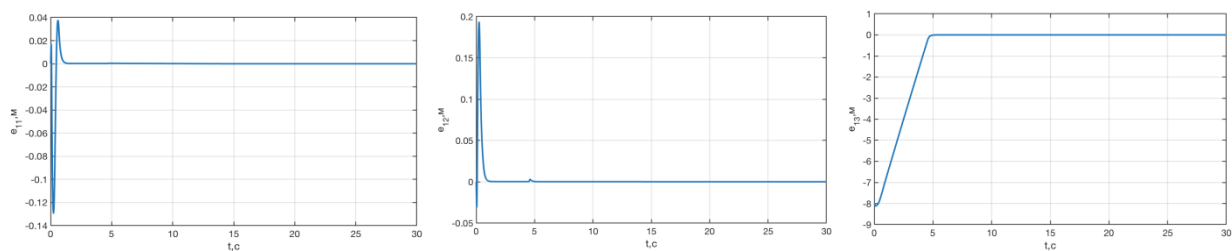


Рис. 8. Графики ошибок слежения  $e_{li}(t) = x_{li}(t) - \chi_i(t)$  [м],  $i=\overline{1,3}$  в замкнутой системе (1) с динамической обратной связью (управлением (31) и наблюдателями (17), (27))

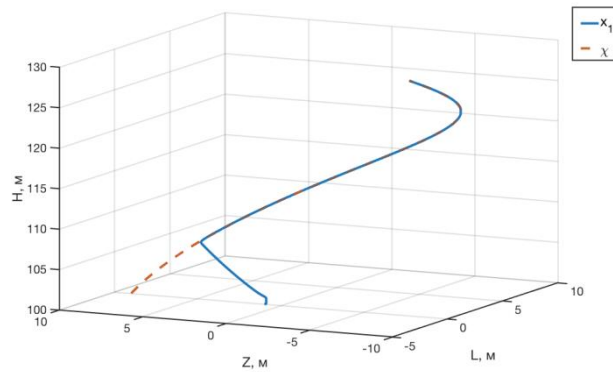


Рис. 9. Пространственный график изображающей точки замкнутой системы (1) с динамической обратной связью (управлением (31) и наблюдателями (17), (27))

Как видно из рис. 7 - 8, в системе с динамической обратной связью наблюдаются небольшие всплески в начале переходных процессов, но время возникновения установившихся режимов сокращается до 4,7 [с]. Как видно из рис. 9, изображающая точка сходится к заданной траектории и далее движется вдоль нее, при этом ошибка слежения составляет  $7 \times 10^{-10}$  [м].

Таким образом, результаты моделирования подтверждают эффективность разработанных алгоритмов синтеза следящей системы в условиях неполных измерений и действия внешних допустимых возмущений. Использование динамического дифференциатора производных задающих воздействий позволит расширить область применения известных методов синтеза динамической обратной связи для решения задач слежения и упростит процесс планирования режимов полета.

## Литература

1. Суворов Д.А., Французова Г.А., Востриков А.С. Синтез двухкаскадной системы автоматического поиска экстремума со скользящими режимами // Доклады Академии наук высшей школы РФ. 2018, Вып. № 2 (39). – С. 82–92.
2. Канатников А.Н., Лю В., Ткачев С.Б. Путьевые координаты в задаче следования вдоль пространственного пути // Математическое моделирование. 2017, Т. 29, №10. – С. 5-19.
3. Пестерев А.В., Гилимьянов Р.Ф. Планирование пути для колесного робота // Труды ИСА РАН. 2006, Т. 25. – С. 204-211.
4. Краснова С.А., Антипов А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2016, №4. – С. 10-21.
5. Kokunko Yu., Krasnova S. Synthesis of a tracking system with restrictions on UAV state variables // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2019, Vol. 10, No. 4. – P. 695-705.
6. Краснов Д.В., Уткин А.В. Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // Управление большими системами. 2017, Вып. 69. – С. 29-49.
7. Краснова С.А. Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // Управление большими системами. 2018, Вып. 76. – С. 6-25.
8. Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В., Уткин А.В. Два метода синтеза наблюдателей состояния и возмущений для беспилотного летательного аппарата // Проблемы управления. 2020, №1. С. 3-16.
9. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008, №5. – С. 51-64.
10. Дылевский А.В., Лозгачев Г.И. Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов // Автоматика и телемеханика. 1999, № 9. – С. 13-20.