

DOI:

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ПОДАВЛЕНИЯ НЕСОГЛАСОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

Кочетков С.А.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

kos@ipu.ru

Аннотация: Проблема компенсации внешних возмущений является одной из старейших задач в классической теории управления. В статье рассмотрен метод стабилизации выходной переменной при воздействии внешних негладких возмущений, не принадлежащих пространству управления. Разработан разрывный закон управления, позволяющий обеспечить заранее заданную точность регулирования по выходу. Описаны различные варианты переходного процесса в замкнутой системе, приведены оценки перерегулирования и установившейся ошибки. Предложенный подход может быть широко использован для компенсации ограниченных внешних возмущений, в том числе, зависящих от состояния системы.

Ключевые слова: релейные системы, внешние возмущения, заданная точность регулирования.

Введение

Одной из основных задач классической теории управления является проблема подавления внешних возмущений [1]. Существует много подходов, основанных на грубых методах, таких как системы с глубокой обратной связью [2, 3], системы с переменной структурой и системы со скользящими режимами [4]. Хорошо известно, что полное подавление влияния внешних возмущений с помощью описанных методов возможно только в том случае, если выполнены так называемые условия согласования [5]. В других случаях для решения проблемы инвариантности могут быть использованы наблюдатели [6] или дифференциаторы [7], с помощью которых можно получить оценки внешних возмущений, а затем использовать их в законе обратной связи на основе декомпозиционных методов [8]. Следует отметить, что в таких ситуациях внешние возмущения должны быть дифференцируемыми определенное количество раз функциями своих переменных в зависимости от порядка системы. В этой статье внешние возмущения рассматриваются как ограниченные функции времени или пространства состояний системы, а задача инвариантности решается относительно выходной переменной. В такой постановке задачи можно говорить только о заданной точности регулирования выхода. В качестве основного закона обратной связи выбран так называемый «вихревой» алгоритм [9]. Показано, что при известной верхней границе внешнего возмущения можно таким образом выбрать параметры обратной связи, чтобы обеспечить заданный уровень точности по выходу и перерегулирование. Разработанный подход позволяет решить задачи компенсации влияния разрывных возмущающих воздействий, например, ударных нагрузок, сил сухого трения и т. д.

1 Постановка задачи

В статье рассматривается система второго порядка

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \xi(t), \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned}$$

где u – управляющее воздействие, x_1 – выходная переменная, $\xi(t)$ – внешнее возмущение

$$(2) \quad |\xi(t)| \leq \Sigma, \Sigma = \text{const} > 0,$$

константа Σ считается известной.

В общем случае возмущение $\xi(t)$ может быть разрывной функцией времени t , переменные x_1, x_2 измеряются и доступны непосредственно для синтеза обратной связи.

В работе ставится задача стабилизации выходной переменной с заданной точностью с помощью управляющего входа u

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t)| \leq \varepsilon_1,$$

где константа $\varepsilon_1 = \text{const} > 0$ задается на этапе проектирования.

¹ Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ №18-01-0846А, 20-01-00363А.

2 Синтез алгоритма управления

«Вихревой» алгоритм является теоретической основой для синтеза обратной связи в этой статье. В работе [9] было показано, что вихревой алгоритм обеспечивает свойство асимптотической инвариантности при воздействии гладких внешних возмущений. В этом разделе, рассмотрено применение «вихревого» алгоритма управления при воздействии на систему негладкого возмущения (2) в соответствии с поставленной задачей (3).

Для обеспечения стабилизации выходной переменной управление u выбирается в виде

$$(4) \quad u = -\alpha x_2 - M \operatorname{sign}(x_1), \quad \varepsilon > \Sigma, \quad \varepsilon = \frac{M}{\alpha},$$

где $\alpha = \operatorname{const} > 0$, $M = \operatorname{const} > 0$.

В соответствии с (1), (4) уравнения замкнутой системы запишутся в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \xi(t), \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - M \operatorname{sign}(x_1). \end{aligned}$$

Основная проблема этого раздела состоит в том, как выбрать параметры управляющего входа α, M для решения поставленной задачи (3). Для последующего анализа введем в рассмотрение систему сравнения

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 + \Sigma \operatorname{sign}(\tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\alpha \tilde{x}_2 - M \operatorname{sign}(\tilde{x}_1). \end{aligned}$$

В статье используются следующие обозначения.

1. t_0 – начальный момент времени.
2. t_1, \tilde{t}_1 – моменты времени, которых $x_1(t_1) = 0, |x_2(t_1)| > \varepsilon, \tilde{x}_1(\tilde{t}_1) = 0, |\tilde{x}_2(\tilde{t}_1)| > \varepsilon$.
3. t'_1, \tilde{t}'_1 – первые моменты времени для которых $\dot{x}_1(t'_1) = 0, \dot{\tilde{x}}_1(\tilde{t}'_1) = 0$.

4. Для обозначения величин переменных систем (5), (6) в некоторые моменты времени t_k, \tilde{t}_k используются следующие формы записи $x_j(t_k) = x_j^k, \tilde{x}_j(\tilde{t}_k) = \tilde{x}_j^k, (k = \overline{0, \infty})$, например, $\tilde{x}_1(\tilde{t}'_1) = \tilde{x}_1^1, x_2(t_1) = x_2^1$ и т.д.

5. $t_k, \tilde{t}_k, (k = \overline{2, \infty})$ – моменты времени, для которых: $x_1^k = 0, |x_2^k| \leq \varepsilon, \tilde{x}_1^k = 0, |\tilde{x}_2^k| \leq \varepsilon$.

Переходный процесс для переменных системы (5) может быть разделен на два этапа:

- 1) достижение точки x_2^2

$$(7) \quad |x_2^2| \leq \varepsilon, \quad t_0 \leq t < t_2;$$

- 2) движение в ε -окрестности начала координат

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t)| \leq \varepsilon_1, \quad \begin{cases} |x_2(t)| \leq \varepsilon, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |x_2(t)| \leq \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 < \varepsilon, \quad t \geq t_2, \end{cases}$$

где $\varepsilon_2 = \operatorname{const} > 0$.

Следует отметить, что в зависимости от начальных условий не все обсуждаемые этапы имеют место в реальности, и некоторые моменты времени должны быть исключены из рассмотрения, но все возможные сценарии будут рассмотрены подробно. Вначале, рассматриваются две ситуации для первой стадии (7).

2.1 Сходимость к точке $(0, x_2^2)$

Ситуация 1. Рассматривается случай с начальными условиями (см. рис. 1)

$$(9) \quad |x_2^0| > \varepsilon, \quad x_1^0 x_2^0 < 0, \quad x_1^0 = \tilde{x}_1^0, \quad x_2^0 = \tilde{x}_2^0,$$

которому соответствуют две фазовые кривые для замкнутой системы (5): кривая a соответствует начальным условиям $x_1^0 < 0, x_2^0 > 0$, кривая b для варианта $x_1^0 > 0, x_2^0 < 0$. Из второго уравнения системы (5) может быть записано следующее неравенство

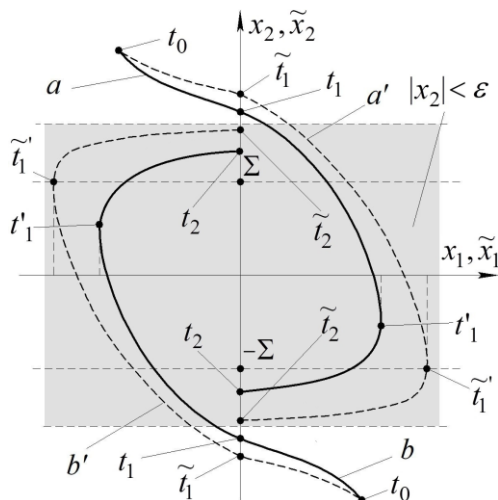


Рис. 1. Фазовый портрет системы с начальными условиями из II и IV квадранта (ситуация 1)

$$(10) \quad |x_2^1| > \varepsilon.$$

Для построения фазовых портретов исключим время из уравнений систем (5) и (6)

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_1} &= \frac{-\alpha\tilde{x}_2 - M\text{sign}(\tilde{x}_1)}{\tilde{x}_2 + \Sigma\text{sign}(\tilde{x}_1)}, \\ \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\alpha x_2 - M\text{sign}(x_1)}{x_2 + \xi(t)}. \end{aligned}$$

В соответствии с выражениями (11) в каждой точке $\tilde{x}_1 = x_1, \tilde{x}_2 = x_2$ для кривой a могут быть записаны следующие неравенства

$$(12) \quad \begin{cases} \left. \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_1} \right|_{\tilde{x}_1=x_1, \tilde{x}_2=x_2} \geq \frac{dx_2}{dx_1}, x_2(t) \geq -\xi(t); \\ \left. \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_1} \right|_{\tilde{x}_1=x_1, \tilde{x}_2=x_2} \leq \frac{dx_2}{dx_1}, \begin{cases} x_2^2 \leq x_2(t) < -\xi(t), \\ x_2^2 \geq -\Sigma; \end{cases} \\ \left. \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_1} \right|_{\tilde{x}_1=x_1, \tilde{x}_2=x_2} \geq \frac{dx_2}{dx_1}, \begin{cases} x_2^2 < x_2(t) < -\Sigma, \\ -\frac{M}{\alpha} < x_2^2 < -\Sigma. \end{cases} \end{cases}$$

По аналогии для каждой точки $\tilde{x}_1 = x_1, \tilde{x}_2 = x_2$ кривой b имеем неравенство

$$(13) \quad \begin{cases} \left. \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_1} \right|_{\tilde{x}_1=x_1, \tilde{x}_2=x_2} \leq \frac{dx_2}{dx_1}, x_2(t) \leq -\xi(t); \\ \left. \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_1} \right|_{\tilde{x}_1=x_1, \tilde{x}_2=x_2} \leq \frac{dx_2}{dx_1}, \begin{cases} -\xi(t) < x_2(t) \leq x_2^2, \\ x_2^2 \leq \Sigma; \end{cases} \\ \left. \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_1} \right|_{\tilde{x}_1=x_1, \tilde{x}_2=x_2} \geq \frac{dx_2}{dx_1}, \begin{cases} \Sigma < x_2(t) < x_2^2, \\ \Sigma < x_2^2 < \varepsilon. \end{cases} \end{cases}$$

Из соотношений (12) – (13) может быть сделан следующий вывод: фазовые кривые a', b' системы сравнения (6) с начальными условиями (9) могут быть рассмотрены как наихудший случай для оценки установившихся ошибок замкнутой системы (5) в силу соотношений

$$(14) \quad |x_2^1| \leq |\tilde{x}_2^1|, |x_1^1| \leq |\tilde{x}_1^1|, |x_2^2| \leq |\tilde{x}_2^2|.$$

Более того, далее будет показано, что значение $|\tilde{x}_1^1|$ является максимальным перерегулированием для переменной $x_1(t)$ с начальными условиями (9).

После разделения переменных выражение (11) переписывается в виде

$$\frac{\tilde{x}_2 + \Sigma \text{sign}(\tilde{x}_1)}{\alpha \tilde{x}_2 + M \text{sign}(\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_2 = -d\tilde{x}_1.$$

После упрощения

$$\frac{\tilde{x}_2 + \Sigma \text{sign}(\tilde{x}_1)}{\alpha \tilde{x}_2 + M \text{sign}(\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_2 = \left[1 - \frac{(\varepsilon - \Sigma) \text{sign}(\tilde{x}_1)}{\tilde{x}_2 + \varepsilon \text{sign}(\tilde{x}_1)} \right] \frac{d\tilde{x}_2}{\alpha},$$

и интегрирования первый интеграл для системы сравнения (6) может быть вычислен как

$$(15) \quad \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \text{sign}(\tilde{x}_1) \ln \left(\frac{e^{\frac{\tilde{x}_2}{(\varepsilon - \Sigma) \text{sign}(\tilde{x}_1)}}}{|\tilde{x}_2 + \varepsilon \text{sign}(\tilde{x}_1)|} \right) + \tilde{x}_1 = C,$$

где константа C определяется в зависимости от начальных условий.

Очевидно, что полный фазовый портрет системы сравнения (6) должен быть построен по частям, в зависимости от знака $\text{sign}(\tilde{x}_1)$, с использованием метода припасовывания, потому что решения систем (5), (6) понимаются в смысле Каратеодори [10].

В соответствии с (9)–(10), принимая во внимание, что $\tilde{x}_1^1 = 0$, значение \tilde{x}_2^1 может быть вычислено из соотношения (15) при $C = C_1$

$$(16) \quad \frac{\alpha}{\varepsilon - \Sigma} |\tilde{x}_1^0| = \ln \left[e^{\frac{|\tilde{x}_2^0| - |\tilde{x}_2^1|}{\varepsilon - \Sigma}} \frac{|\tilde{x}_2^0| - \varepsilon}{|\tilde{x}_2^1| - \varepsilon} \right],$$

$$\text{где } C_1 = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \text{sign}(\tilde{x}_1^0) \ln \left(\frac{e^{\frac{\tilde{x}_2^0}{(\varepsilon - \Sigma) \text{sign}(\tilde{x}_1^0)}}}{|\tilde{x}_2^0 + \varepsilon \text{sign}(\tilde{x}_1^0)|} \right) + \tilde{x}_1^0.$$

Из (11) можно получить, что производная $d\tilde{x}_1/d\tilde{x}_2$ равна нулю при $\tilde{x}_2 = -\Sigma \text{sign}(\tilde{x}_1)$. Таким образом, фазовая кривая a' имеет максимум при $\tilde{x}_2 = -\Sigma$, а кривая b' имеет минимум при $\tilde{x}_2 = \Sigma$. С учетом этого, максимальное перерегулирование $|\tilde{x}_1^1|$ вычисляется из (15) при $C = C_2$ и $|\tilde{x}_2| = \Sigma$

$$(17) \quad |\tilde{x}_1^1| = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(e^{\frac{|\tilde{x}_2^1| + \Sigma}{\varepsilon - \Sigma}} \frac{\varepsilon - \Sigma}{\varepsilon + |\tilde{x}_2^1|} \right),$$

$$\text{где } C_2 = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \text{sign}(\tilde{x}_1^1) \ln \left(\frac{\frac{\tilde{x}_2^1}{(\varepsilon - \Sigma)\text{sign}(\tilde{x}_1^1)}}{|\tilde{x}_2^1 + \varepsilon \text{sign}(\tilde{x}_1^1)|} \right).$$

Для описанной ситуации (9) после однократного переключения функции реле $\text{sign}(\tilde{x}_1)$ фазовый портрет замкнутой системы через конечное время пересекает линию $\tilde{x}_1 = 0$ в точке $x_2(t) = x_2^2$. Из уравнений системы (5) следует, что после этого начинается вторая стадия (8).

Ситуация 2. Начальные точки изображены на рис. 2 и соответствуют неравенствам

$$(18) \quad |x_2^0| > \varepsilon, x_1^0 x_2^0 > 0, x_1^0 = \tilde{x}_1^0, x_2^0 = \tilde{x}_2^0.$$

Справедливость неравенств (12), (13) может быть легко проверена с помощью (11). Для этого случая события $x_1(t'_1) = 0, |x_2(t'_1)| > \varepsilon$ не происходит в момент времени t'_1 (см. рис. 2). Максимальное перерегулирование вычисляется из (15) при $C = C_3$ в точке экстремума $x_2 = \Sigma \text{sign}(\tilde{x}_1)$, как это было сделано ранее в (17):

$$(19) \quad |\tilde{x}_1^1| = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(e^{\frac{|\tilde{x}_2^0| + \Sigma}{\varepsilon - \Sigma}} \frac{\varepsilon - \Sigma}{\varepsilon + |\tilde{x}_2^0|} \right) + |x_1^0|,$$

$$\text{где } C_3 = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \text{sign}(\tilde{x}_1^0) \ln \left(\frac{\frac{\tilde{x}_2^0}{(\varepsilon - \Sigma)\text{sign}(\tilde{x}_1^0)}}{|\tilde{x}_2^0 + \varepsilon \text{sign}(\tilde{x}_1^0)|} \right) + \tilde{x}_1^0.$$

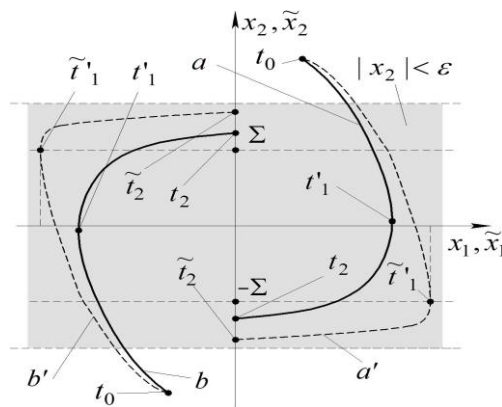


Рис. 2. Фазовые портреты с начальными условиями из I и III квадранта (ситуация 2)

Введем в рассмотрение δ -окрестность начала координат, которая связана с установившимися ошибками регулирования $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ с учетом (8), (15)

$$(20) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 \geq 0, |\tilde{x}_2| \leq \varepsilon_2; \\ \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{e^{\varepsilon - \Sigma}}{\tilde{x}_2 + \varepsilon} \right) + \tilde{x}_1 \leq C_\delta; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 \leq 0, |\tilde{x}_2| \leq \varepsilon_2; \\ \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{e^{\varepsilon - \Sigma}}{\varepsilon - \tilde{x}_2} \right) - \tilde{x}_1 \leq C_\delta, \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\text{где } C_\delta = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{\frac{\varepsilon_2}{e^{\varepsilon - \Sigma}}}{\varepsilon + \varepsilon_2} \right).$$

Следующие ситуации объединяют все случаи с начальными условиями из зоны $|x_2^0| \leq \varepsilon$, для которых справедливость неравенств (12), (13) может быть проверена непосредственно с помощью (11).

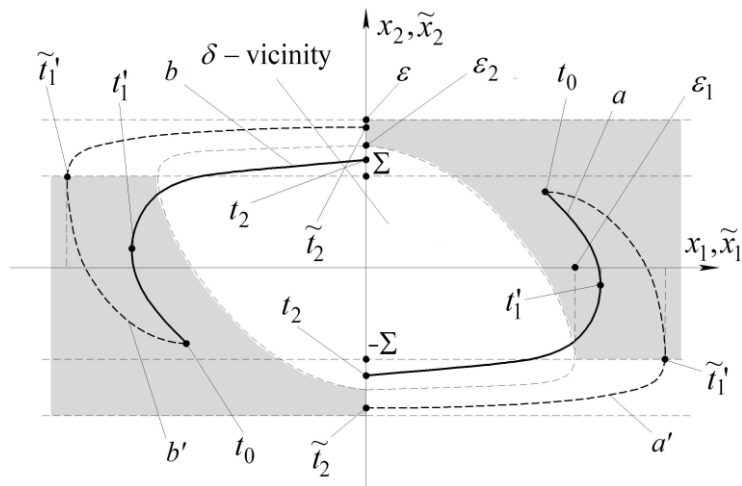


Рис. 3. Фазовый портрет с начальными условиями из ε -зоны (ситуация 3)

Ситуация 3. В соответствии с этим сценарием начальная точка принадлежит области, которая описывается системой неравенств (см. рис. 3)

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^0 = \tilde{x}_1^0, x_2^0 = \tilde{x}_2^0; \\ x_1^0 > 0, -\Sigma < x_2^0 \leq \varepsilon; \\ \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{e^{\varepsilon - \Sigma}}{\varepsilon + x_2^0} \right) + x_1^0 > C_\delta; \\ x_1^0 < 0, -\varepsilon \leq x_2^0 < \Sigma; \\ \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{e^{\varepsilon - \Sigma}}{\varepsilon - x_2^0} \right) - x_1^0 < C_\delta. \end{array} \right.$$

Максимальное перерегулирование $|\tilde{x}_1^1|$ вычисляется с помощью (19).

Ситуация 4. Фазовая кривая начинается в области (см. рис. 4):

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^0 = \tilde{x}_1^0, x_2^0 = \tilde{x}_2^0; \\ x_1^0 > 0, -\varepsilon \leq x_2^0 \leq -\Sigma; \\ \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{e^{\varepsilon - \Sigma}}{\varepsilon + x_2^0} \right) + x_1^0 > C_\delta; \\ x_1^0 < 0, \Sigma \leq x_2^0 \leq \varepsilon; \\ \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{e^{\varepsilon - \Sigma}}{\varepsilon - x_2^0} \right) - x_1^0 < C_\delta. \end{array} \right.$$

Для этой ситуации событие с условиями $x_1(t'_1) = 0, |x_2(t'_1)| > \varepsilon$ не существует (см. рис. 4).

Максимальное перерегулирование $|\tilde{x}_1^1|$ больше, чем ε_1 и может быть вычислено за два шага в соответствии с выражениями (16)–(17). Сначала рассчитывается \tilde{x}_2^2 из трансцендентного уравнения

$$(23) \quad \frac{\alpha}{\varepsilon - \Sigma} |\tilde{x}_1^0| = \ln \left[e^{\frac{|\tilde{x}_2^0| - |\tilde{x}_2^2|}{\varepsilon - \Sigma}} \frac{|\tilde{x}_2^0| - \varepsilon}{|\tilde{x}_2^2| - \varepsilon} \right],$$

далее, вычисляется $|\tilde{x}_1^1|$ из выражения

$$(24) \quad |\tilde{x}_1^1| = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(e^{\frac{|\tilde{x}_2^2| + \Sigma}{\varepsilon - \Sigma}} \frac{\varepsilon - \Sigma}{\varepsilon + |\tilde{x}_2^2|} \right).$$

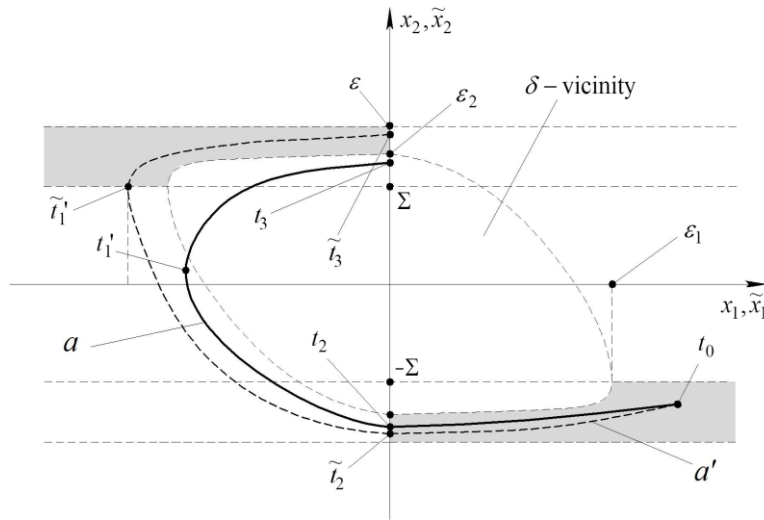


Рис. 4. Фазовый портрет с начальными условиями из ε -зоны (ситуация 4)

Ситуация 5 соответствует фазовым портретам, которые начинаются в δ -окрестности начала координат (20). Ниже будет показано, что во всех описанных сценариях траектории системы при $t \geq t_2$ не выходят из ε -зоны и сходятся к заданной δ -области, размер которой определяется ошибками $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Таким образом, если начальная точка находится в δ -окрестности, то фазовая кривая не покидает ее.

2.2 Вычисление установившейся ошибки

Движения системы замкнутого контура (5) и (6) представляют интерес в этом пункте для $t \geq t_2$. Предположим для определенности, что $x_2^2 = \tilde{x}_2^2 > 0$. Ситуация для отрицательных начальных условий может рассматриваться аналогично. В предыдущем подразделе было показано, что фазовый портрет системы сравнения (6) можно использовать для оценки максимального превышения системных переменных замкнутого контура $x_1(t), x_2(t)$. В этом подразделе будет показано, что существует точка устойчивого состояния $\tilde{x}_2^2 = \varepsilon_2$ для системы сравнения (6) в следующем смысле

$$(25) \quad \tilde{x}_2^i = -\tilde{x}_2^{i+1}, i = \overline{2, \infty}.$$

Для этого используется метод отображений Пуанкаре [11]. Как было показано на рис. 3, 4 согласно (20), кривая для границ δ -зоны симметрична относительно начала координат. Таким образом, в соответствии с выбранной методологией и обозначениями, функция точечного отображения вводится только для одной точки в следующем виде

$$(26) \quad y = \varphi(\tilde{x}_2^2), y = -\tilde{x}_2^3,$$

где функция $y = \varphi(\tilde{x}_2^2)$ может быть получена из первого интеграла (15), переменная y выбирается с отрицательным знаком, чтобы получить положительное значение функции.

Теорема. Траектории системы сравнения (6) при $t \geq t_2$ сходятся к предельному циклу, который записывается в обозначениях (25)–(26) как

$$(27) \quad y = \varphi(\varepsilon_2), y = \varepsilon_2,$$

где ε_2 вычисляется из трансцендентного уравнения

$$(28) \quad e^{2\varepsilon_2/(\varepsilon - \Sigma)} = \frac{\varepsilon + \varepsilon_2}{\varepsilon - \varepsilon_2},$$

а установившаяся ошибка регулирования

$$(29) \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(e^{\frac{\varepsilon_2 + \Sigma}{\varepsilon - \Sigma}} \frac{\varepsilon - \Sigma}{\varepsilon + \varepsilon_2} \right).$$

Доказательство. Как упоминалось ранее, решение систем (5), (6) понимается в смысле Каратеодори [10], а точки разрыва функции $\text{sign}[\tilde{x}_1(t)]$ принадлежат множеству с нулевой мерой. В соответствии с этим для получения функции точечного отображения (или функции последования) используется

первый интеграл (15) с постоянной $C_4 = \frac{\varepsilon - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{\frac{\tilde{x}_2^2}{e^{(\varepsilon - \Sigma)}}}{\tilde{x}_2^2 + \varepsilon} \right)$ с учетом (26):

$$(30) \quad (\varepsilon - y)e^{y/(\varepsilon - \Sigma)} - (\varepsilon + \tilde{x}_2^2)e^{-\tilde{x}_2^2/(\varepsilon - \Sigma)} = 0.$$

Из последнего уравнения очевидно, что невозможно получить явное выражение для функции точечного отображения в виде (26), но эта неявная функция будет использоваться для доказательства теоремы. Далее, вводятся и исследуются две функции:

$$(31) \quad \varphi_1 = (\varepsilon - y)e^{y/(\varepsilon - \Sigma)}, \varphi_2 = (\varepsilon + \tilde{x}_2^2)e^{-\tilde{x}_2^2/(\varepsilon - \Sigma)}, \quad y \in [0, \varepsilon], \tilde{x}_2^2 \in [0, \varepsilon].$$

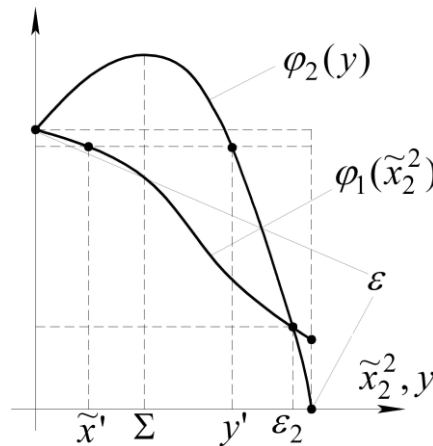


Рис. 5. Графики функций $\varphi_1(y), \varphi_2(\tilde{x}_2^2)$

Производные от этих функций по их аргументам

$$(32) \quad \frac{d\varphi_1}{dy} = \frac{\Sigma - y}{\varepsilon - \Sigma} e^{y/(\varepsilon - \Sigma)},$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tilde{x}_2^2} = -\frac{\Sigma + \tilde{x}_2^2}{\varepsilon - \Sigma} e^{-\tilde{x}_2^2/(\varepsilon - \Sigma)}.$$

В соответствии с (32) запишем систему неравенств для функции φ_1

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dy} > 0, y \in [0, \Sigma); \\ \frac{d\varphi_1}{dy} < 0, y \in (\Sigma, \varepsilon]. \end{cases}$$

Из последней системы получим, что функция φ_1 возрастает от начальной точки до точки экстремума $y = \Sigma, \varphi_1(\Sigma) = (\varepsilon - \Sigma)e^{\Sigma/(\varepsilon - \Sigma)}$ и затем убывает до нуля

$$\varphi_1(0) = \varepsilon, \varphi_1(\varepsilon) = 0.$$

Из (32) получим, что производная функции φ_2 отрицательна на всей области определения

$$\frac{d\varphi_2}{d\tilde{x}_2^2} < 0, \tilde{x}_2^2 \in [0, \varepsilon],$$

и функция φ_2 из (31) монотонно убывает от начальной до конечной точки в соответствии со значениями

$$\varphi_2(0) = \varepsilon, \varphi_2(\varepsilon) = 2\varepsilon e^{-\varepsilon/(\varepsilon-\Sigma)} > 0.$$

Качественные графики функций φ_1, φ_2 изображены на рис. 5. С учетом рассуждения, очевидно существует точка ε_2 вычисляемая согласно (28), в которой

$$\varphi_1(\varepsilon_2) = \varphi_2(\varepsilon_2).$$

Графический метод может быть использован для построения качественного графика функции последования на основе (30)–(31). Основная идея продемонстрирована на рис. 5. Для каждой точки $\tilde{x}_2^2 = \tilde{x}'$ находится точка $\varphi_1(\tilde{x}')$, и затем по этому значению отыскивается величина $y = y'$ в соответствии с равенством $\varphi_1(y') = \varphi_2(\tilde{x}')$.

Качественная кривая функции точечного отображения $y = \varphi(\tilde{x}_2^2)$, построенная по этой процедуре, изображена на рис. 6 с биссектрисой $y = \tilde{x}_2^2$. Согласно рис. 6, фазовый портрет замкнутой системы с начальными условиями в окрестности (20) не покидает эту зону. С другой стороны, фазовый портрет за пределами δ -области (20) сходится к этой области при $t \rightarrow \infty$. Ошибки установившегося состояния для выходной переменной $x_1(t)$ ограничены значением ε_1 , вычисленным из выражения (29), которое получается из (15) с начальной точкой $(0, \varepsilon_2)$.

Теорема доказана.

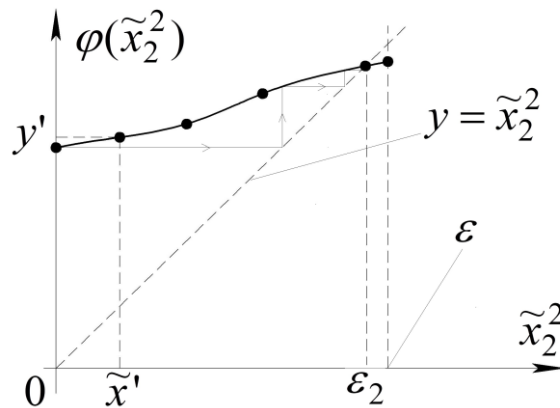


Рис. 6. Функция последования для системы сравнения (6)

Заключение

В статье рассмотрена задача инвариантности с заданной точностью. Были получены оценки перерегулирования и установившейся ошибки. Направлением дальнейших исследований является сравнение разработанного подхода с известными методами на основе глубоких обратных связей и динамических компенсаторов. В силу того, что выражение для функции последования не может быть получено в явном виде, необходимо также разработать численную процедуру ее расчета. Предложенная обратная связь может быть использована для построения высокоточных систем управления при воздействии сил сухого трения и ударных нагрузок.

Литература

1. Щипанов Г.В. Гироскопические приборы слепого полета. Теория, расчет методы проектирования. – М.: Оборонгиз, 1938.

2. *Utkin V.I., Utkin V.A.* Design of invariant systems by the method of separation of motions // Autom. Remote Control. Vol. 44. 1983, № 12. part 1. – P. 1559-1567.
3. *Utkin V.A.* Invariance and independence in systems with separable motion // Autom. Remote Control. Vol. 62. 2001, №. 11. – P. 1825-1843.
4. *Shi J., Utkin V.I., Guldner J.* Sliding mode control in electromechanical systems. – London: Taylor and Francis, 2009.
5. *Wohnem W.M.* Linear Multivariable Systems. A Geometric Approach. – New York: Springer-Verlag, 1985.
6. *Krasnova S.A., Kuznetsov S.I.* Uncontrollable perturbations of nonlinear dynamic systems: estimation on moving modes // Autom. Remote Control. Vol. 66. 2005, № 10. – P. 1580-1593.
7. *Levant A.* Higher order sliding modes, differentiation and output feedback control // Int. J. Control. Vol. 76. 2003, № 9–10. – P. 924-941.
8. *Drakunov S.V., Izosimov D.B., Luk'yanov A.G., Utkin V.A., et al.* Block control principle // Autom. Remote Control, part I. Vol. 51. 1990, № 5. – P. 601-608.
9. *Kochetkov S.A., Utkin V.A.* Invariance in systems with unmatched perturbations // Autom. Remote Control. Vol. 74. 2013, № 7. – P. 1097-1127.
10. *Filippov A.F.* Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. – Springer Netherlands, 1988.
11. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. – Prentice-Hall, 2002.