

DOI:  
**ПОСТРОЕНИЕ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
МЕТОДОМ БИЛИНЕАРИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ<sup>1</sup>**

**Душин С.В., Абраменков А.Н., Кутяков Е.Ю., Искаков А.Б., Сальников А.М.**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,*

*Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65*

s.dushin@inbox.ru, aabramenkov@asmon.ru, evgeniykutyakov@gmail.com, isk\_alex@mail.ru,  
salnikov@ipu.ru

*Аннотация: Рассмотрена процедура построения слабонелинейных моделей энергетических систем методом представления исходных нелинейных уравнений системы в билинейном виде (билинеаризация Карлемана). В частности, описан общий алгоритм приведения системы нелинейных дифференциальных уравнений к билинейному виду и предложены методы оптимизации размерности получаемой таким способом билинейной системы уравнений. Итоговая процедура билинеаризации продемонстрирована на примере простой электроэнергетической системы вида «генератор-нагрузка».*

**Ключевые слова:** билинейные динамические системы, нелинейные динамические системы, билинеаризация Карлемана, разложение в ряд Тейлора, электроэнергетические системы.

## **Введение**

Проблема анализа динамических свойств электроэнергетических систем (ЭЭС), в частности оценка их устойчивости, по-прежнему остаётся актуальной. На сегодняшний день основные методы решения данной проблемы сводятся к применению модального анализа, основанного на оценке спектра матрицы динамики линеаризованной модели системы, а также собственных векторов этой матрицы, связывающих моды с переменными состояниями системы [1]. Полученная таким образом оценка устойчивости и динамических свойств системы адекватна только в предположении, что на систему могут быть оказаны небольшие внешние возмущения (т.н. устойчивость в малом - small signal stability), в пределах которых система может рассматриваться как линейная с достаточной для конкретной задачи точностью. Поскольку энергетические системы обладают существенной нелинейностью, применимость методов линейного модального анализа ограничивается в основном оценкой устойчивости в установившемся режиме.

В работе [2] были предложены альтернативные показатели для анализа свойств динамических систем, основанные на спектральных разложениях решений уравнений Ляпунова, а в работе [3] эти показатели были применены к анализу устойчивости двухрайонной ЭЭС, и продемонстрировали некоторые преимущества и удобство в использовании по сравнению с показателями модального анализа. Однако эти исследования были выполнены для случая автономной линеаризованной модели, в которой нестационарность вводилась искусственным образом, не на уровне описания системы, а путем получения серии матриц динамики различающихся между собой значениями фиксированных компонент. В то же время, основные преимущества предложенного метода заключаются в возможности оценки парных взаимодействий мод системы и резонансных взаимодействий, связанных с вынужденными колебаниями в ЭЭС, а также в возможности учёта процесса накопления энергии возмущения во времени в определённых модах системы. Анализ указанных процессов естественным образом требует учёта нестационарности исследуемой системы.

Таким образом, расширение традиционных линейных и перспективных методов анализа динамических свойств энергетических систем на нелинейный и нестационарный случай позволит качественно расширить область применения методов модального анализа в электроэнергетике. Математический аппарат билинейных динамических систем позволяет учесть как нелинейность системы, так и ее нестационарность на уровне модели [4], поэтому представляет особый интерес в контексте развития математических методов оценки различных динамических характеристик ЭЭС.

## **1 Билинейные динамические системы**

Билинейные динамические системы (bilinear systems, BLS) являются специальным классом нелинейных динамических систем, которые позволяют описать слабую нелинейность в сравнительно простой форме. Относительная простота описания нелинейности предопределила раннее развитие фундаментальных основ данного класса систем. В частности, теория билинейных систем активно развивается начиная с 50-х годов 20-го века [5].

---

<sup>1</sup> Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 19-19-00673

В контексте современной теории нелинейных динамических систем, данный класс билинейных систем может быть рассмотрен как частный случай более общего класса линейно-аналитических (linear-analytic) систем [6], обобщенная форма записи уравнения динамики которых может быть представлена в виде:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x, u, t) = f(x, t) + b(x)u(t)$$

Билинейная модель подразумевает, что уравнение (1) может быть приведено к частному виду:

$$(2) \quad \dot{x}(t) = ax(t) + Nx(t)u(t) + bu(t),$$

где  $-ax(t)$  и  $bu(t)$  – линейная часть уравнения,  $Nx(t)u(t)$  – билинейная часть.

Нетрудно заметить, что нелинейное дифференциальное уравнение (2) можно рассматривать как линейное относительно состояний, если в качестве параметра принять вход управления, или как линейное относительно управления, если в качестве параметра принять переменные состояния.

Для получения канонической записи для билинейной системы сформируем систему уравнений, связанных в некотором пространстве состояний  $x \in R^n$  и приводимых к виду (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Nxu + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Если матрица  $B$  принадлежит  $R^{n \times p}$ , то нетрудно показать, что система (3) может быть представлена в следующем виде [7]:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^p N_i x u_i + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

где  $A$  – матрица динамики;  $B$  – матрица управления;  $u$  – вектор управления, размерностью  $p \times 1$ ;  $u_i$  –  $i$ -я компонента вектора  $u$ ,  $N_i$  – матрицы билинейных членов уравнения.

## 2 Билинеаризация нелинейных динамических систем

Модель системы (4) способна описывать нелинейность, присущую ряду реальных физических объектов [6], [5]. Однако реальные динамические системы далеко не всегда приводимы к системе уравнений (4), что существенно ограничивает область применения билинейных систем.

В 60-70-х годах 20-го века исходная концепция билинейных систем была существенно расширена. В частности, показано, что нелинейные системы (1) могут быть описаны при помощи системы билинейных уравнений в виде:

$$(5) \quad \hat{x} = \hat{A}\hat{x} + \hat{N}\hat{x}u + \hat{B}u,$$

где  $\hat{x}$  – вектор состояний, который формируется при помощи кронекеровских произведений исходного линейного вектора [6]. Процедура представления уравнения (1) в форме (5) получила название билинеаризация Карлемана [6].

Важно отметить, что в уравнении (1)  $f(x, t)$  и  $b(x)$  может быть любой нелинейной функцией, представимой в виде ряда Тейлора в интересующей окрестности  $x$ . Таким образом, класс динамических систем, представимых в виде (1), описывает широкий спектр нелинейностей, тогда как возможность их описания в терминах билинейных систем, делает билинейные модели важным инструментом анализа нелинейных динамических систем. Рассмотрим далее процедуру билинеаризации Карлемана.

Допустим, что система описывается набором уравнений динамики, связанных в некотором пространстве состояний  $x \in R^n$  и приводимых к форме (1). Запишем систему уравнений для данной системы в следующем виде:

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x) + B(x)u \\ y = Cx \end{cases}$$

Разложим уравнения динамики в системе (6) в ряд Тейлора. Получившуюся систему уравнений динамики можно представить в виде [8]:

$$(7) \quad \dot{x} = Ax + \sum_{i=2}^N A_i x^{(i)} + \sum_{i=0}^N B_i x^{(i)} u,$$

где  $A$  – матрица Якоби линейной части системы,  $A_i, B_i$  – матрицы производных соответствующего порядка,  $N$  – число учитываемых членов разложения, а  $x^{(i)}$  – кронекеровское произведение вектора состояний  $i$ -го порядка на самого себя, то есть:

$$(8) \quad x^{(i)} = x \otimes \dots \otimes x$$

Как видно, в уравнении (7) присутствуют векторы  $x^{(i)}$ , соответствующие  $i$ -му члену в разложении в ряде Тейлора [6]. Эти члены не являются линейно зависимыми от исходного вектора состояния, в связи с этим необходимо дополнить ими исходный вектор состояния и определить дополнительные уравнения для новых состояний. Данную процедуру можно выполнить, используя правило дифференцирования произведения функций. В том числе, для произвольного  $i$  можно записать  $x^{(i)}$  в виде:

$$(9) \quad \frac{d(x^{(n)})}{dt} = \frac{d(x^{(n-1)} \otimes x^{(1)})}{dt} = \dot{x}^{(n-1)} \otimes x^{(1)} + x^{(1)} \otimes \dot{x}^{(n-1)}$$

Ограничивая старшую степень в разложении ряда Тейлора первыми  $P$  членами и вычисляя для каждого  $i \in [1:P]$  выражения  $\frac{d(x^{(n)})}{dt}$  согласно (9), можно записать систему уравнений для билинеаризованной системы [6]:

$$(10) \quad \hat{x} = \hat{A}\hat{x} + \hat{N}\hat{x}u + \hat{B}u$$

где  $\hat{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \dots \\ x^{(P)} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_N \\ 0 & A_{21} & \dots & A_{2,N-1} \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_{N1} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{N} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1,N-1} \\ B_{20} & B_{21} & \dots & B_{2,N-2} \\ \dots & B_{30} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{N0} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

При этом компоненты матриц  $\hat{A}$  и  $\hat{N}$  выражаются следующим образом:

$$(11) \quad A_{ji} = A_i \otimes I \otimes \dots \otimes I \dots \otimes I + I \otimes A_i \otimes I \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes A_i$$

$$(12) \quad B_{ji} = B_i \otimes I \otimes \dots \otimes I \dots \otimes I + I \otimes B_i \otimes I \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes B_i$$

Важно отметить, что в общем случае степень  $P$ , в которую возводится вектор состояний, и количество учитываемых в разложении в ряд Тейлора членов разложения могут не совпадать, то есть в общем случае  $P \neq N$ .

Таким образом, форма (10) позволяет представить нелинейную систему (6) в билинейной форме при помощи нового вектора состояний, состоящего из произведений Кронекера исходного вектора.

Отдельно следует отметить частный случай систем (1), когда от вектора состояния зависит только компонента  $f(x, t)$ :

$$(13) \quad \dot{x}(t) = f(x, u, t) = f(x, t) + bu(t),$$

где  $f(x, t)$  – по-прежнему любая нелинейная функция, для которой существует разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ . Для данного случая структура матрица  $N$  и форма вычисления её компонент несколько упрощаются, и могут быть представлены в виде [9]:

$$(14) \quad \hat{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{20} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & B_{30} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$(15) \quad B_{k0} = B \otimes I \otimes \dots \otimes I \dots \otimes I + I \otimes B \otimes I \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes B$$

Как видно, процедура билинеаризации выполняется путем разложения всех нелинейных членов исходных уравнений динамики в ряд Тейлора и выбора тех из них, которые соответствуют сделанному ранее предположению о старшем порядке нелинейных членов. Далее формируется новый вектор состояния и дополнительные уравнения билинеаризованной системы. Поскольку билинеаризация повышает размерность исходной системы в геометрической прогрессии, важным этапом является этап оптимизации размерности полученной билинеаризованной системы. Базовые подходы к задаче оптимизации размерности будут рассмотрены на примере простой системы далее.

### 3 Билинеаризация простой системы из одного генератора и нагрузки

Рассмотрим простую энергетическую систему с одним генератором и нагрузкой как представлено ниже:

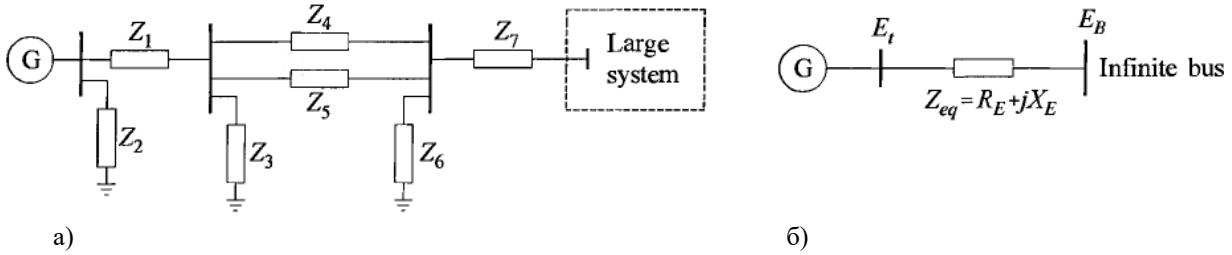


Рис.1. Общая (а) и эквивалентная (б) схема системы генератор-нагрузка.

Для базовой классической модели генератора, уравнения движения системы принимают вид [10]:

$$(16) \quad \frac{d(\Delta\omega)}{dt} = \frac{1}{2H} (T_m - T_e - K_D \Delta\omega)$$

$$(17) \quad \frac{d\delta}{dt} = \omega_0 \Delta\omega$$

Электрическая мощность при этом выражается как:

$$(18) \quad T_e = \frac{E' E_B}{X} \sin\delta = K_s \sin\delta$$

В уравнениях (16)-(18):  $\Delta\omega$  – изменение частоты вращения;  $\omega_0$  – опорная частота сети;  $\delta$  – угол ротора;  $T_m$  – механическая мощность;  $T_e$  – электрическая мощность;  $E'$  – напряжение генератора;  $E_B$  – напряжение бесконечной шины;  $X$  – импеданс соединительной линии;  $K_D$  – коэффициент демпфирования.

Подставляя (18) в (16), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{d(\Delta\omega)}{dt} = -\frac{K_D \Delta\omega}{2H} - \frac{K_s \sin\delta}{2H} + \frac{T_m}{2H} \\ \frac{d\delta}{dt} = \omega_0 \Delta\omega \end{cases}$$

Вводя обозначения вектора состояний, вектора управления и матрицы управления, уравнение (19) можно записать в виде:

$$(20) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = D_{11}x_1 + D_{12} \sin(x_2) + b_1 u \\ \dot{x}_2 = D_{21}x_1 \end{cases},$$

$$\text{где } x = \begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \delta \end{bmatrix}, u = [u_1] = T_m, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2H} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{11} = -\frac{K_D}{2H}, D_{12} = -\frac{K_s}{2H}, D_{21} = \omega_0,$$

Очевидно, что система (20) не является билинейной, но может быть билинеаризована. Согласно общему алгоритму построения билинейной модели, вначале необходимо определить порядок нелинейных членов приближения. Следует указать, что в рассматриваемом случае нелинейность в системе (20) представлена синусоидальной зависимостью приращения угловой скорости от угла поворота ротора ( $\delta$ ), что исключает члены с чётной степенью из разложения в ряд Тейлора. Следовательно, ограничение порядка учитываемых членов  $N < 3$  не имеет смысла. С другой стороны, для представления гладкой нелинейности в относительно небольших значениях отклонения угла ротора  $\delta$  нет необходимости учитывать нелинейность высокого порядка, поэтому разумно выбрать старший нелинейный член в ряде Тейлора  $N = 3$  и достроить вектор состояний для учета кубических членов, то есть выбрать  $P = N = 3$ .

Разложим нелинейную часть системы уравнений (20) в ряд Тейлора и отбросим все члены старше третьего:

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 \approx D_{11}x_1 + D_{12}x_2 - \frac{D_{12}}{6}x_2^3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = D_{21}x_1 \end{cases}$$

Уравнения (21) могут быть приведены к стандартному виду (13):

$$(22) \quad \dot{x} = f(x) + B u \approx A_1 x^{(1)} + A_2 x^{(2)} + A_3 x^{(3)} + B u$$

Для рассматриваемой системы (21) матрицы и векторы, входящие в (22), будут следующими:  
- кронекеровские произведения вектора состояния:

$$x^{(1)} = [x_1 \quad x_2]^T;$$

$$x^{(2)} = [x_1 \quad x_2]^T \otimes [x_1 \quad x_2]^T = [x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad x_2 x_1 \quad x_2^2]^T;$$

$$x^{(3)} = [x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2x_1 \quad x_2^2]^T \otimes [x_1 \quad x_2]^T =$$

$$= [x_1^3 \quad x_1^2x_2 \quad x_1x_2x_1 \quad x_1x_2^2 \quad x_2x_1^2 \quad x_2x_1x_2 \quad x_2^2x_1 \quad x_2^3]^T;$$

- линейная часть разложения:  $A_1 = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix};$

- квадратичная часть разложения:  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

- кубическая часть разложения:  $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{D_{12}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Для системы (21) и  $P = N = 3$ , имеем:

$$(23) \quad \hat{x} = \hat{A}\hat{x} + \hat{N}\hat{x}u + \hat{B}u,$$

где  $\hat{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{bmatrix}; \hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \cdot & A_{21} & A_{22} \\ \cdot & \cdot & A_{31} \end{bmatrix}; \hat{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{20} & 0 & 0 \\ 0 & B_{30} & 0 \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$

$$A_{21} = A_1 \otimes I + I \otimes A_1 = \begin{bmatrix} 2D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{11} & 0 & D_{12} \\ D_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{21} & D_{21} & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{22} = A_2 \otimes I + I \otimes A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{31} = A_1 \otimes I \otimes I + I \otimes A_1 \otimes I + I \otimes I \otimes A_1 = \begin{bmatrix} 3D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 2D_{11} & 0 & D_{12} & 0 & D_{12} & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 2D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{21} & D_{21} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & D_{12} \\ D_{21} & 0 & 0 & 0 & 2D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{21} & 0 & 0 & D_{21} & D_{11} & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{21} & D_{21} & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_{20} = B \otimes I + B \otimes I = \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \\ 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_{30} = B \otimes I \otimes I + I \otimes B \otimes I + I \otimes I \otimes B = \begin{bmatrix} 3b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 2b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итоговая неоптимизированная система уравнений имеет размерность  $14 \times 14$  и может быть записана как:

$$\begin{aligned}
& \quad \quad \quad (24) \quad \quad \hat{x} = \\
& \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{D_{12}}{6} \\ D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{21} & D_{11} & 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 2D_{11} & 0 & D_{12} & 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 2D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{21} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 & 0 & 2D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & 0 & D_{21} & D_{11} & 0 & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 & D_{21} & D_{21} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \times \\
& \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_1 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2x_1 \\ x_1x_2^2 \\ x_2x_1^2 \\ x_2x_1x_2 \\ x_2^2x_1 \\ x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_1 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2x_1 \\ x_1x_2^2 \\ x_2x_1^2 \\ x_2x_1x_2 \\ x_2^2x_1 \\ x_2^3 \end{bmatrix} [u_1] \\
& + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u_1]
\end{aligned}$$

Приведённую выше систему можно упростить, поскольку в векторе состояний присутствует избыточность, а именно:  $x_1x_2 = x_2x_1$ ;  $x_1^2x_2 = x_1x_2x_1 = x_2x_1^2$ ;  $x_1x_2^2 = x_2x_1x_2 = x_2^2x_1$ . Также можно заметить, что переменные второго порядка ( $x_1^2$ ,  $x_1x_2$ ,  $x_2^2$ ) никак не влияют на остальные переменные. Таким образом, размерность системы может быть снижена до 6.

Удалив избыточные переменные и связанные с ними избыточные уравнения, получим окончательный вариант билинейного уравнения, описывающего динамику системы (20):

$$(25) \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & -\frac{D_{12}}{6} \\ D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3D_{11} & 3D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{21} & 2D_{11} & 2D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2D_{21} & D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^3 \\ x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^3 \\ x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} [u_1] +$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u_1],$$

где  $x_1 = \Delta\omega$ ,  $x_2 = \delta$ ,  $[u_1] = T_m$ ,  $b_1 = \frac{1}{2H}$ ,  $D_{11} = -\frac{K_D}{2H}$ ,  $D_{12} = -\frac{K_S}{2H}$ ,  $D_{21} = \omega_0$

Для оценки качественных отличий полученной билинейной системы (25) от исходной нелинейной системы (20) и от её линеаризованной модели, в рамках данного исследования выполнялось прямое моделирование в среде Matlab указанных уравнений при следующих параметрах (в относительных единицах):  $D_{11} = -1$ ,  $D_{12} = -1$ ,  $D_{21} = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $u_1 = \sin(t)$ ,  $t$  – время симуляции. При этом в качестве линеаризованной модели принималось уравнение вида (22) без второго и третьего слагаемого. Результаты моделирования представлены ниже.

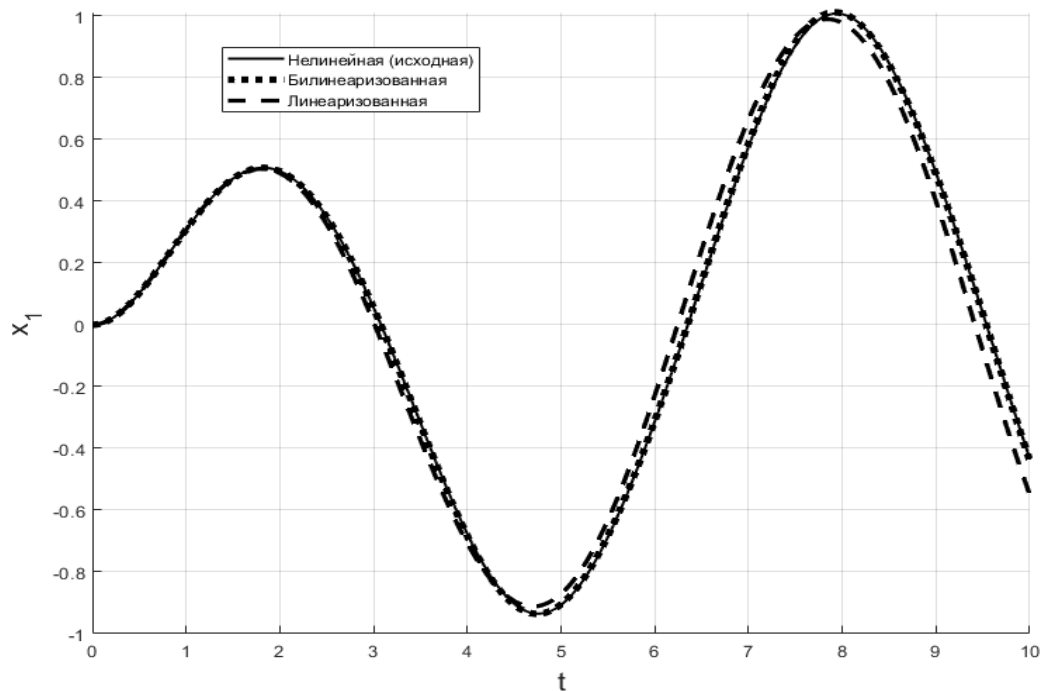


Рис. 2. Переходной процесс состояния  $x_1$  нелинейной системы (20), а также её линеаризованной и билинеаризованной модели

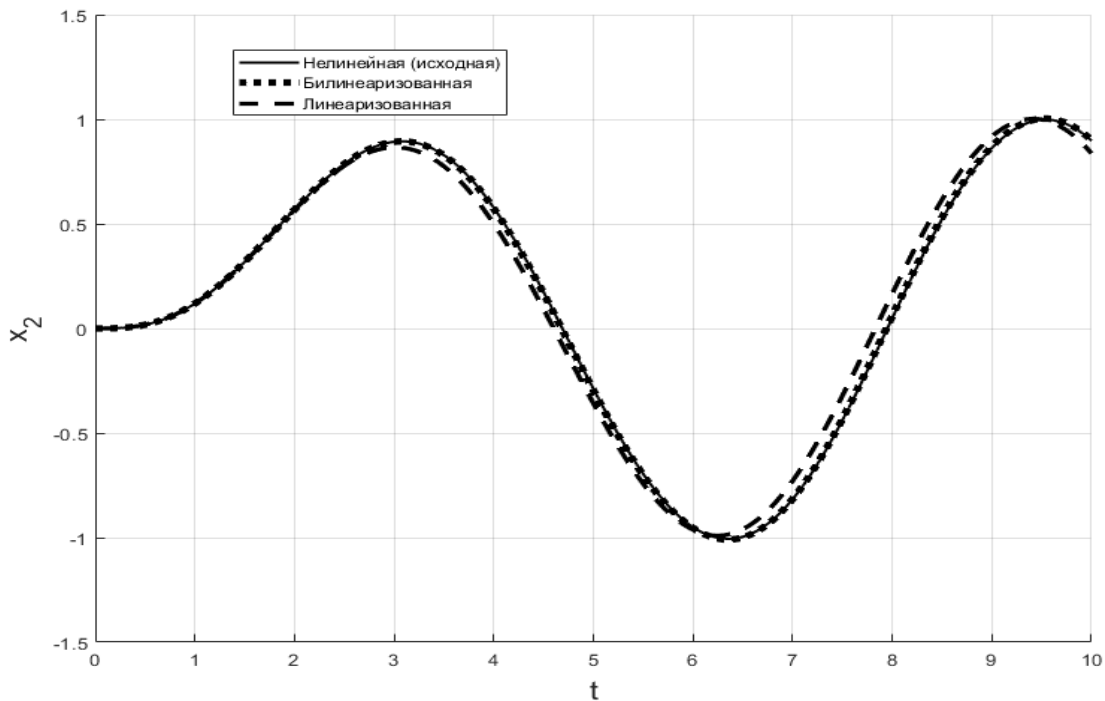


Рис. 3. Переходной процесс состояния  $x_2$  нелинейной системы (20), а также её линейризованной и билинеаризованной модели

Из графиков следует, что кривые переходного процесса состояний  $x_1, x_2$  для случая билинеаризованной модели почти на всём промежутке симуляции совпадают с кривыми для нелинейной системы (20), тогда как линейризованная модель имеет значительные отклонения от исходной системы. Таким образом, при рассматриваемой величине внешнего возмущения учёт нелинейности третьего порядка малости, как и ожидалось, значительно лучше приближает исходную нелинейную систему, нежели линейризованная модель.

## Заключение

Возможность приведения к билинейной форме широкого класса нелинейных систем, а также возможность выражения нестационарности линейных систем в качестве билинейности, делают математический аппарат билинейных моделей динамических систем полезным во многих применениях, в частности, в задачах аналитического исследования динамических свойств электроэнергетических систем.

Поскольку характер нелинейности генераторов в энергетических системах не позволяет напрямую описать их в билинейной форме, для представления в билинейной форме необходимо преобразовать систему при помощи процедуры билинеаризации Карлемана.

Рассмотренный пример билинеаризации простой энергетической системы «генератор-нагрузка» и выполненный для него вычислительный эксперимент показали, что билинеаризованная модель такой простой системы, учитывающая нелинейности третьего порядка, удовлетворительно приближает исходную нелинейную систему при синусоидальном внешнем возмущении с единичной амплитудой, и ожидаемо значительно точнее описывает исходную систему. При этом важно, что билинейное представление позволяет аналитически оценить спектр матрицы динамики, найти границы управляемости и наблюдаемости и т.д., то есть произвести количественную оценку динамических свойств системы. С другой стороны, даже в случае рассмотренной простой системы, которая в нелинейном виде имеет порядок  $2 \times 2$ , процесс билинеаризации увеличивает размерность до шести, что может стать объективной трудностью при исследовании более сложных ЭЭС.

## Литература

1. Perez-Arriaga I.J., Verghese G.C., and Schweppe F.C. Selective modal analysis with applications to electric power systems, Part I: Heuristic introduction // IEEE Trans. Power Apparatus Syst. Vol. 101. No. 9. 1982. – P. 3117-3125.
2. Iskakov A.B., Yadykin I.B. Lyapunov modal analysis and participation factors with applications to small-signal stability of power systems, arXiv:1909.02227 [math.OC], Sep. 2019.



3. *Кутяков Е.Ю., Душин С.В., Исаков А.Б., Абраменков А.Н.* Investigation of Lyapunov Modal Analysis Framework Using the Two-Area Test Power System / Proceedings of the 12th International Conference "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). М.: IEEE, 2019. С. 1-5.
4. *Benner P., Cao X., Schilders W.* A bilinear H2 model order reduction approach to linear parameter-varying systems // *Advances in Computational Mathematics* (2019) 45:2241–2271.
5. *Mohler R. R. and Kolodziej W. J.* An Overview of Bilinear System Theory and Applications // *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. smc-10, No. 10. 1980. – P. 683-688.
6. *Rugh W. J.* *Nonlinear System Theory: The Volterra/Wiener Approach.* – The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981. – 344p.
7. *Carlo Bruni, Gianni DiPillo, Giorgio Koch.* Bilinear Systems: An Appealing Class of "Nearly Linear" Systems in Theory and Applications // *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. ac – 19, No. 4, 1974. – P. 334 – 348.
8. *Arroyo J., Betancourt R., Messina A.R., Barocio E.* Development of bilinear power system representations for small signal stability analysis // *Electric Power Systems Research*, vol. 77, No. 10, 2007. – P.1239-1248.
9. *Condon, Marissa & Ivanov, Rossen.* Nonlinear systems – Algebraic gramians and model reduction // *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 24, No. 1, 2005. – P. 202-219.
10. *Kundur P.* *Power Systems Stability and Control.* McGraw-Hill: New York, 1994.