DOI:

СТАБИЛИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАЗНОТЕМПОВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1]

Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», Россия, г. Москва, Вавилова, 44, корп. 2.

Московский физико-технический институт, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер, 9.

mdmitriev@mail.ru, makarov@isa.ru

Аннотация: рассматривается построение стабилизирующего регулятора в слабо нелинейной сингулярно возмущенной системе, где коэффициенты матриц зависят от переменных состояния. Система содержит две группы «быстрых» переменных. Построение управления ведется в рамках подхода SDRE и включает в себя нелинейную коррекцию регулятора для линейно-квадратичной задачи.

Ключевые слова: стабилизация, сингулярно возмущенные системы, SDRE.

Введение

Задачи построения стабилизирующих регуляторов продолжают привлекать интерес исследователей из-за многочисленных приложений. Особенно эти задачи теории управления являются актуальными для сложных нелинейных задач управления в системах высокой размерности. Здесь рассматривается класс задач стабилизации трехтемповых динамических систем, где траектории переменных состояния есть решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и в которых можно выделить три группы движений. Это так называемые «медленные» переменные, в которых скорости изменения фазовых переменных порядка единицы; «быстрые» переменные, где скорости порядка ε^{-1} и «сверхбыстрые», имеющие скорость порядка ε^{-2}, где ε есть некоторый малый положительный параметр.

Такие модели систем управления возникают в различных приложениях в экономике, динамике полета и др. (см. [1-3]), где при их расчете, возникают различные вычислительные проблемы, связанные с размерностью, жесткостью при вычислениях, необходимостью решения задач в реальном времени и др. Конечно, исследование таких задач во многом связано со спецификой их моделей, но зачастую удается использовать асимптотики решений для преодоления жесткости и приемы декомпозиции исходной системы для понижения ее размерности. Для исследования моделей с разнотемповыми переменными используют теорию сингулярных возмущений и работы А.Н. Тихонова [4], И.С. Градштейна [5], А.Б. Васильевой [6]. Примеры использования этих результатов в теории управления можно найти в [2,7,8].

Здесь рассматривается построение стабилизирующего регулятора в слабо нелинейной сингулярно возмущенной системе, где коэффициенты матриц зависят от переменных состояния. Система содержит две группы «быстрых» переменных, скорости которых различаются на порядок. Построение управления ведется в рамках подхода SDRE, согласно которому исходная нелинейная аффинная по управлению система и критерий качества представляются в квазилинейном виде, т.е. с помощью матриц, коэффициенты которых теперь зависят от вектора состояния. Управление ищется в форме стандартного линейно-квадратичного регулятора Калмана, но также с зависящими от состояния матрицами. Техника SDRE довольно популярна в настоящее время и имеет множество приложений (см. обзоры [9-11]).

В настоящей работе предлагается подход, согласно которому итоговое стабилизирующее управление представляет собой композицию трех линейных регуляторов для систем управления меньшей размерности и их нелинейную коррекцию. Численные эксперименты показали, что учет нелинейности повышает эффективность построенного регулятора по сравнению с линейным. Для двухтемповых систем управления аналогичный алгоритм демонстрировался в работе [12].

1 Постановка задачи

Рассмотрим слабо нелинейную разнотемповую систему с зависящими от состояния коэффициентами

1 *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-57-00011.*

$$
(1)\qquad
\begin{gathered}
\frac{dx}{dt}=A_{11}(x,\varepsilon)x+A_{12}(x,\varepsilon)y+A_{13}(x,\varepsilon)z+B_1(x,\varepsilon)u,\;\; x(0)=x^0,\\
\varepsilon\frac{dy}{dt}=A_{21}(x,\varepsilon)x+A_{22}(x,\varepsilon)y+A_{23}(x,\varepsilon)z+B_2(x,\varepsilon)u,\;\; y(0)=y^0,\\
\varepsilon^2\frac{dz}{dt}=A_{31}(x,\varepsilon)x+A_{32}(x,\varepsilon)y+A_{33}(x,\varepsilon)z+B_3(x,\varepsilon)u,\;\; z(0)=z^0,\\
x\in X\subset\mathbb{R}^{n_x},\; y\in Y\subset\mathbb{R}^{n_y}, z\in Z\subset\mathbb{R}^{n_z}, u\in\mathbb{R}^{r},\\
\psi=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^T\in\Psi\subset\mathbb{R}^{n_x+n_y+n_z},\; \Psi=X\times Y\times Z,\; t\in[0,\infty),\; 0<\varepsilon\ll 1,
\end{gathered}
$$

где $\psi(t)$ – вектор фазовых координат системы, состоящий из векторов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $u(t)$ – управление, ε – малый параметр, считающийся известным, $A_{ij}(x,\varepsilon)=A_{ij,0}+\varepsilon A_{ij,1}(x)$, $B_i(x,\varepsilon)=B_{i,0}+\varepsilon B_{i,1}(x)$, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$. Отметим, что в системе (1) переменные $x(t)$ являются «медленными», а переменные $y(t)$, $z(t)$ являются быстрыми. Причем скорость изменения $z(t)$ существенно выше скорости изменения $y(t)$.

Будем предполагать выполнение следующих условий, выделяемых в тексте с помощью римских цифр.

I. Коэффициенты матриц в системе (1) и (2) являются ограниченными и непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов в области $G=\{x\in X, 0\le t<\infty, 0<\varepsilon\le\varepsilon_0\}$, где ε_0 – достаточно малое положительное число, а также обращаются в постоянные числа при $\varepsilon = 0$. Ограниченная область пространства состояний Ψ включает в себя начало координат. Все траектории замкнутой системы, соответствующей (1), существуют, единственны и принадлежат Ψ для любого непрерывного управления $u(t)$ при $t\in[0,\infty)$. ■

Задача состоит в построении стабилизирующего управления $u(\psi,\varepsilon)$.

2 Построение регулятора

Для построения управления для системы (1) воспользуемся подходом SDRE, согласно которому рассматривается критерий качества вида

$$
(2)\qquad J(u)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\psi^T Q(x,\varepsilon)\psi+u^T(x,\varepsilon)Ru(x,\varepsilon)\right)dt\to\min_u,
$$

где $Q\ge 0$, $R>0$ являются положительно полуопределенной и положительно определенной матрицами соответственно при любых x и ε.

Согласно данной технике управление имеет такой же вид, как в обычной линейно-квадратичной задаче, а именно

$$
(3)\qquad u(\psi,\varepsilon)=-R^{-1}B^T(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon)\psi,
$$

где матрица K является положительно определенным решением следующего SDRE

$$
(4)\qquad -K(x,\varepsilon)A(x,\varepsilon)-A^T(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon)+K(x,\varepsilon)B(x,\varepsilon)R^{-1}B^T(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon)-Q(x,\varepsilon)=0,
$$

в котором

$$
A(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}
A_{11}(x,\varepsilon) & A_{12}(x,\varepsilon) & A_{13}(x,\varepsilon)\\
\dfrac{A_{21}(x,\varepsilon)}{\varepsilon} & \dfrac{A_{22}(x,\varepsilon)}{\varepsilon} & \dfrac{A_{23}(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\\
\dfrac{A_{31}(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2} & \dfrac{A_{32}(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2} & \dfrac{A_{33}(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2}
\end{pmatrix},\;
B(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}
B_1(x,\varepsilon)\\
\dfrac{B_2(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\\
\dfrac{B_3(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2}
\end{pmatrix},\;
Q(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}
Q_{11}(x,\varepsilon) & Q_{12}(x,\varepsilon) & Q_{13}(x,\varepsilon)\\
Q_{12}^T(x,\varepsilon) & Q_{22}(x,\varepsilon) & Q_{23}(x,\varepsilon)\\
Q_{13}^T(x,\varepsilon) & Q_{23}^T(x,\varepsilon) & Q_{33}(x,\varepsilon)
\end{pmatrix}.
$$

Для того чтобы (4) имело решение, введем условия [11,10]

II. В области G для любых фиксированных x и ε тройка матриц $\left(A(x,\varepsilon), B(x,\varepsilon), C(x,\varepsilon)\right)$, где $C^T C = Q(x,\varepsilon)$, стабилизируема и детектируема. ■

Отметим, что непосредственное вычисление управления (3) с помощью (4) затруднено по нескольким причинам. Во-первых, часть коэффициентов в (4) являются большими, что делает эту задачу «жесткой». Во-вторых, коэффициенты в (4) зависят от состояния x, что обуславливает необходимость пересчета K для каждого нового значения x, а это приводит при большой размерности исходной системы к значительному росту объема вычислений.

Для преодоления первой причины воспользуемся следующим представлением решения K

$$K(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} K_{11}(x,\varepsilon) & \varepsilon K_{12}(x,\varepsilon) & \varepsilon^2 K_{13}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon K_{12}{}^T(x,\varepsilon) & \varepsilon K_{22}(x,\varepsilon) & \varepsilon^2 K_{23}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^2 K_{13}{}^T(x,\varepsilon) & \varepsilon^2 K_{23}{}^T(x,\varepsilon) & \varepsilon^2 K_{33}(x,\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Кроме того, представим матрицу Q в следующем виде

$$Q(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} Q_{11,0} & Q_{12,0} & Q_{13,0} \\ Q_{12,0}^T & Q_{22,0} & Q_{23,0} \\ Q_{13,0}^T & Q_{23,0}^T & Q_{33,0} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} Q_{11,1}(x) & Q_{12,1}(x) & Q_{13,1}(x) \\ Q_{12,1}^T(x) & Q_{22,1}(x) & Q_{23,1}(x) \\ Q_{13,1}^T(x) & Q_{23,1}^T(x) & Q_{33,1}(x) \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти представления в (4), получим следующие шесть уравнений для нахождения блоков $K(x,\varepsilon)$

$$\begin{gathered} -K_{11}(x,\varepsilon)A_{11}(x,\varepsilon) - A_{11}(x,\varepsilon)^T K_{11}(x,\varepsilon) - K_{12}(x,\varepsilon)A_{21}(x,\varepsilon) - A_{21}(x,\varepsilon)^T K_{12}(x,\varepsilon)^T - K_{13}(x,\varepsilon)A_{31}(x,\varepsilon) \\ -A_{31}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon)^T + \left(K_{11}(x,\varepsilon)S_{11}(x,\varepsilon) + K_{12}(x,\varepsilon)S_{12}(x,\varepsilon)^T + K_{13}(x,\varepsilon)S_{13}(x,\varepsilon)^T\right)K_{11}(x,\varepsilon) \\ +\left(K_{11}(x,\varepsilon)S_{12}(x,\varepsilon) + K_{12}(x,\varepsilon)S_{22}(x,\varepsilon) + K_{13}(x,\varepsilon)S_{23}(x,\varepsilon)^T\right)K_{12}(x,\varepsilon)^T \\ +\left(K_{11}(x,\varepsilon)S_{13}(x,\varepsilon) + K_{12}(x,\varepsilon)S_{23}(x,\varepsilon) + K_{13}(x,\varepsilon)S_{33}(x,\varepsilon)\right)K_{13}(x,\varepsilon)^T - Q_{11}(x,\varepsilon) = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -K_{11}(x,\varepsilon)A_{12}(x,\varepsilon) - K_{12}(x,\varepsilon)A_{22}(x,\varepsilon) - \varepsilon A_{11}(x,\varepsilon)^T K_{12}(x,\varepsilon) - A_{21}(x,\varepsilon)^T K_{22}(x,\varepsilon) - K_{13}(x,\varepsilon)A_{32}(x,\varepsilon) \\ -A_{31}(x,\varepsilon)^T K_{23}(x,\varepsilon)^T + K_{11}(x,\varepsilon)\left(S_{11}(x,\varepsilon)\varepsilon K_{12}(x,\varepsilon) + S_{12}(x,\varepsilon)K_{22}(x,\varepsilon) + S_{13}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)^T\right) + \\ K_{12}(x,\varepsilon)\left(S_{12}(x,\varepsilon)^T \varepsilon K_{12}(x,\varepsilon) + S_{22}(x,\varepsilon)K_{22}(x,\varepsilon) + S_{23}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)^T\right) + \\ K_{13}(x,\varepsilon)\left(S_{13}(x,\varepsilon)^T \varepsilon K_{12}(x,\varepsilon) + S_{23}(x,\varepsilon)^T K_{22}(x,\varepsilon) + S_{33}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)^T\right) - Q_{12}(x,\varepsilon) = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -K_{11}(x,\varepsilon)A_{13}(x,\varepsilon) - K_{12}(x,\varepsilon)A_{23}(x,\varepsilon) - K_{13}(x,\varepsilon)A_{33}(x,\varepsilon) - \varepsilon A_{21}(x,\varepsilon)^T K_{23}(x,\varepsilon) - A_{31}(x,\varepsilon)^T K_{33}(x,\varepsilon) \\ -\varepsilon^2 A_{11}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon) + K_{11}(x,\varepsilon)\left(\varepsilon^2 S_{11}(x,\varepsilon)K_{13}(x,\varepsilon) + S_{13}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon) + \varepsilon S_{12}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)\right) \\ +K_{12}(x,\varepsilon)\left(\varepsilon^2 S_{12}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon) + \varepsilon S_{22}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon) + S_{23}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon)\right) \\ +K_{13}(x,\varepsilon)\left(\varepsilon^2 S_{13}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon) + \varepsilon S_{23}(x,\varepsilon)^T K_{23}(x,\varepsilon) + S_{33}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon)\right) - Q_{13}(x,\varepsilon) = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon K_{12}(x,\varepsilon)^T A_{12}(x,\varepsilon) - K_{22}(x,\varepsilon)A_{22}(x,\varepsilon) - K_{23}(x,\varepsilon)A_{32}(x,\varepsilon) - A_{22}(x,\varepsilon)^T K_{22}(x,\varepsilon) - \varepsilon A_{12}(x,\varepsilon)^T K_{12}(x,\varepsilon) \\ -A_{32}(x,\varepsilon)^T K_{23}(x,\varepsilon)^T + \varepsilon K_{12}(x,\varepsilon)^T \left(\varepsilon S_{11}(x,\varepsilon)K_{12}(x,\varepsilon) + S_{12}(x,\varepsilon)K_{22}(x,\varepsilon) + S_{13}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)^T\right) \\ +K_{22}(x,\varepsilon)\left(\varepsilon S_{12}(x,\varepsilon)^T K_{12}(x,\varepsilon) + S_{22}(x,\varepsilon)K_{22}(x,\varepsilon) + S_{23}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)^T\right) \\ +K_{23}(x,\varepsilon)\left(\varepsilon S_{13}(x,\varepsilon)^T K_{12}(x,\varepsilon) + S_{23}(x,\varepsilon)^T K_{22}(x,\varepsilon) + S_{33}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)^T\right) - Q_{22}(x,\varepsilon) = 0, \end{gathered}$$

$$-\varepsilon K_{12}(x,\varepsilon)^T A_{13}(x,\varepsilon)-K_{22}(x,\varepsilon)A_{23}(x,\varepsilon)-K_{23}(x,\varepsilon)A_{33}(x,\varepsilon)-\varepsilon^2 A_{12}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon)-\varepsilon A_{22}(x,\varepsilon)^T K_{23}(x,\varepsilon)$$
$$-A_{32}(x,\varepsilon)^T K_{33}(x,\varepsilon)+\varepsilon K_{12}(x,\varepsilon)^T\left(\varepsilon^2 S_{11}(x,\varepsilon)K_{13}(x,\varepsilon)+S_{13}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon)+\varepsilon S_{12}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)\right)$$
$$+K_{23}(x,\varepsilon)\left(\varepsilon^2 S_{13}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon)+\varepsilon S_{23}(x,\varepsilon)^T K_{23}(x,\varepsilon)+S_{33}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon)\right)$$
$$+K_{22}(x,\varepsilon)\left(\varepsilon^2 S_{12}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon)+\varepsilon S_{22}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)+S_{23}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon)\right)-Q_{23}(x,\varepsilon)=0,$$
$$-\varepsilon^2 K_{13}(x,\varepsilon)^T A_{13}(x,\varepsilon)-\varepsilon K_{23}(x,\varepsilon)^T A_{23}(x,\varepsilon)-K_{33}(x,\varepsilon)A_{33}(x,\varepsilon)-\varepsilon^2 A_{13}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon)$$
$$-\varepsilon A_{23}(x,\varepsilon)^T K_{23}(x,\varepsilon)-A_{33}(x,\varepsilon)^T K_{33}(x,\varepsilon)$$
$$+\varepsilon^2 K_{13}(x,\varepsilon)^T\left(\varepsilon^2 S_{11}(x,\varepsilon)K_{13}(x,\varepsilon)+S_{13}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon)+\varepsilon S_{12}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)\right)$$
$$+\varepsilon K_{23}(x,\varepsilon)^T\left(\varepsilon^2 S_{12}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon)+\varepsilon S_{22}(x,\varepsilon)K_{23}(x,\varepsilon)+S_{23}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon)\right)$$
$$+K_{33}(x,\varepsilon)\left(\varepsilon^2 S_{13}(x,\varepsilon)^T K_{13}(x,\varepsilon)+\varepsilon S_{23}(x,\varepsilon)^T K_{23}(x,\varepsilon)+S_{33}(x,\varepsilon)K_{33}(x,\varepsilon)\right)-Q_{33}(x,\varepsilon)=0,$$

где

$$S_{11}(x,\varepsilon)=B_1(x,\varepsilon)R^{-1}B_1(x,\varepsilon)^T, S_{12}(x,\varepsilon)=B_1(x,\varepsilon)R^{-1}B_2(x,\varepsilon)^T,$$
$$S_{13}(x,\varepsilon)=B_1(x,\varepsilon)R^{-1}B_3(x,\varepsilon)^T, S_{22}(x,\varepsilon)=B_2(x,\varepsilon)R^{-1}B_2(x,\varepsilon)^T,$$
$$S_{23}(x,\varepsilon)=B_2(x,\varepsilon)R^{-1}B_3(x,\varepsilon)^T, S_{33}(x,\varepsilon)=B_3(x,\varepsilon)R^{-1}B_3(x,\varepsilon)^T.$$

Для преодоления второй отмеченной причины – необходимости численного решения *(4)* для каждого значения x – воспользуемся подходом коррекции функционала из [13,12]. Ищем K в виде

(5)
$$K(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} K_{11,0} & \varepsilon K_{12,0} & \varepsilon^2 K_{13,0} \\ \varepsilon K_{12,0}{}^T & \varepsilon K_{22,0} & \varepsilon^2 K_{23,0} \\ \varepsilon^2 K_{13,0}{}^T & \varepsilon^2 K_{23,0}{}^T & \varepsilon^2 K_{33,0}\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix} K_{11,1}(x) & \varepsilon K_{12,1}(x) & \varepsilon^2 K_{13,1}(x) \\ \varepsilon K_{12,1}{}^T(x) & \varepsilon K_{22,1}(x) & \varepsilon^2 K_{23,1}(x) \\ \varepsilon^2 K_{13,1}{}^T(x) & \varepsilon^2 K_{23,1}{}^T(x) & \varepsilon^2 K_{33,1}(x)\end{pmatrix},$$

где знак “T” означает транспонирование. Подставляя это выражение, а также выражения для матриц A, B в *(3)* и ограничиваясь в разложении членами нулевого и первого порядков, имеем

(6)
$$u^1(\psi,\varepsilon)=u^0(\psi)+\varepsilon u^1(\psi),$$
$$u^0(\psi)=-L_x x-L_y y-L_z z,$$
$$u^1(\psi)=-R^{-1}((B_{1,1}(x)^T K_{11,0}+B_{1,0}^T K_{11,1}(x)+B_{2,1}(x)^T K_{12,0}^T+$$
$$B_{2,0}^T K_{12,1}(x)^T+B_{3,1}(x)^T K_{13,0}^T+B_{3,0}^T K_{13,1}(x)^T)x$$
$$+(B_{3,1}(x)^T K_{23,0}^T+B_{3,0}^T K_{23,1}(x)^T+B_{2,1}(x)^T K_{22,0}+B_{2,0}^T K_{22,1}(x)+B_{1,0}^T K_{12,0})y$$
$$+(B_{3,0}^T K_{33,1}(x)+B_{3,1}(x)^T K_{33,0}+B_{2,0}^T K_{23,0})z),$$

где $u^0(\psi)$ – линейный регулятор, а $\varepsilon u^1(\psi)$ – его нелинейная коррекция, $L_z=R^{-1}B_{3,0}^T K_{33,0}, L_y=R^{-1}\left(B_{2,0}^T K_{22,0}+B_{3,0}^T K_{23,0}^T\right), L_x=R^{-1}\left(B_{1,0}^T K_{11,0}+B_{2,0}^T K_{12,0}^T+B_{3,0}^T K_{13,0}^T\right)$.

С учетом *(5)* из приведенных выше шести уравнений для нахождения блоков $K(x,\varepsilon)$ с помощью группировки членов по одинаковым степеням ε получаем соответствующие уравнения. Сначала рассмотрим уравнения для блоков, независящих от x и ε

$$
\begin{gathered}
-K_{33,0}A_{33,0}-A_{33,0}^{T}K_{33,0}+K_{33,0}B_{3,0}R^{-1}B_{3,0}^{T}K_{33,0}-Q_{33,0}=0,\\
-K_{23,0}A_{cl33,0}-K_{22,0}A_{cl23,0}-A_{32,0}^{T}K_{33,0}-Q_{23,0}=0,\\
-K_{13,0}A_{cl33,0}-K_{11,0}A_{cl13,0}-K_{12,0}A_{cl23,0}-A_{31,0}^{T}K_{33,0}-Q_{13,0}=0,\\
-K_{22,0}\left(A_{22,0}-B_{2,0}R^{-1}B_{3,0}^{T}K_{23,0}^{T}\right)-\left(A_{22,0}^{T}-K_{23,0}B_{3,0}\,R^{-1}B_{2,0}^{T}\right)K_{22,0}+K_{22,0}B_{2,0}R^{-1}\,B_{2,0}^{T}K_{22,0}\\
-K_{23,0}A_{32,0}-A_{32,0}^{T}K_{23,0}^{T}+K_{23,0}B_{3,0}R^{-1}B_{3,0}^{T}K_{23,0}^{T}-Q_{22,0}=0,\\
-K_{12,0}A_{cl22,0}-K_{11,0}A_{cl12,0}-A_{21,0}^{T}K_{22,0}-K_{13,0}A_{cl32,0}-A_{31,0}^{T}K_{23,0}^{T}-Q_{12,0}=0,\\
-K_{11,0}\left(A_{11,0}-B_{1,0}R^{-1}\,B_{2,0}^{T}K_{12,0}^{T}-B_{1,0}R^{-1}B_{3,0}^{T}K_{13,0}^{T}\right)\\
-\left(A_{11,0}^{T}-K_{12,0}B_{2,0}R^{-1}B_{1,0}^{T}-K_{13,0}B_{3,0}\,R^{-1}B_{1,0}^{T}\right)K_{11,0}\\
-K_{12,0}A_{21,0}-A_{21,0}^{T}K_{12,0}^{T}-K_{13,0}A_{31,0}-A_{31,0}^{T}K_{13,0}^{T}+K_{12,0}B_{2,0}R^{-1}\,B_{2,0}^{T}K_{12,0}^{T}+\\
K_{13,0}B_{3,0}R^{-1}B_{2,0}^{T}K_{12,0}^{T}+K_{12,0}B_{2,0}\,R^{-1}B_{3,0}^{T}K_{13,0}^{T}+K_{13,0}B_{3,0}R^{-1}B_{3,0}^{T}K_{13,0}^{T}+K_{11,0}B_{1,0}R^{-1}B_{1,0}^{T}K_{11,0}-Q_{11,0}=0,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

где

$A_{cl12,0}=A_{12,0}-B_{1,0}\,L_y,\, A_{cl13,0}=A_{13,0}-B_{1,0}\,L_z,\, A_{cl22,0}=A_{22,0}-B_{2,0}L_y,\, A_{cl23,0}=A_{23,0}-B_{2,0}L_z,$

$A_{cl32,0}=A_{32,0}-B_{3,0}L_y,\, A_{cl33,0}=A_{33,0}-B_{3,0}L_z.$

Уравнениям (7) соответствуют три линейно-квадратичные задачи меньшей размерности.

1. $$\frac{d\hat z}{d\tau_z}=A_{33,0}\hat z+B_{3,0}u_z^0,\quad \hat z(0)=z^0,\ \tau_z=\frac{t}{\varepsilon^2},$$

$$J_z\left(u_z^0\right)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\hat z^T Q_{33,0}\hat z+\left(u_z^0\right)^T Ru_z^0\right)d\tau_z\to\min_{u_z^0};$$

2. $$\frac{d\hat y}{d\tau_y}=\hat A_{22,0}\hat y+\hat B_{2,0}u_y^0,\quad \hat y(0)=y^0,\ \tau_y=\frac{t}{\varepsilon},$$

$$J_y\left(u_y^0\right)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\hat y^T \hat Q_{22.0}\hat y+\left(u_y^0\right)^T Ru_y^0\right)d\tau_y\to\min_{u_y^0};$$

3. $$\frac{d\hat x}{dt}=\hat A_{11,0}\hat x+\hat B_{1,0}u_x^0,\quad \hat x(0)=x^0,$$

$$J_x\left(u_x^0\right)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\hat x^T \hat Q_{11,0}\,\hat x+\left(u_x^0\right)^T Ru_x^0\right)dt\to\min_{u_x^0},$$

где

$$\hat{A}_{22,0} = A_{22,0} - \hat{A}_{23,0}A_{32,0} - \hat{A}_{23,0}S_{33,0}\hat{Q}_{23,0}^T + S_{23,0}\hat{Q}_{23,0}^T,\ \hat{B}_{2,0} = B_{2,0} - \hat{A}_{23,0}B_{3,0},$$

$$\hat{Q}_{22.0} = Q_{22,0} - \hat{Q}_{23,0}A_{32,0} - A_{32,0}^T\hat{Q}_{23,0}^T - \hat{Q}_{23,0}S_{33,0}\hat{Q}_{23,0}^T,$$

$$\hat{A}_{23,0} = A_{cl23,0}\, A_{cl33,0}^{-1},\ \hat{Q}_{23,0} = \left(A_{32,0}{}^T K_{33,0} + Q_{23,0}\right)A_{cl33,0}^{-1},\ S_{23,0} = B_{2,0}R^{-1}B_{3,0}^T,\ S_{33,0} = B_{3,0}R^{-1}B_{3,0}^T,$$

$$\hat{A}_{11,0} = A_{11,0} + S_{12,0}\,\tilde{Q}_{12,0}{}^T + S_{13,0}\tilde{Q}_{13,0}{}^T - \tilde{A}_{13,0}\tilde{A}_{31,0} - \hat{A}_{12,0}\tilde{A}_{21,0},\ \hat{B}_{1,0} = B_{1,0} - \tilde{A}_{13,0}B_{3,0} - \hat{A}_{12,0}B_{2,0},$$

$$\hat{Q}_{11,0} = Q_{11,0} - \tilde{Q}_{12,0}A_{21,0} - A_{21,0}{}^T\,\tilde{Q}_{12,0}{}^T - \tilde{Q}_{12,0}\,S_{22,0}\tilde{Q}_{12,0}{}^T - \tilde{Q}_{13,0}A_{31,0}$$

$$-A_{31,0}{}^T\,\tilde{Q}_{13,0}{}^T - \tilde{Q}_{13,0}S_{33,0}\tilde{Q}_{13,0}{}^T - \tilde{Q}_{12,0}\,S_{23,0}\tilde{Q}_{13,0}{}^T - \tilde{Q}_{13,0}S_{23,0}{}^T\,\tilde{Q}_{12,0}{}^T,$$

$$\tilde{A}_{13,0} = \hat{A}_{13,0} - \hat{A}_{12,0}\,\hat{A}_{23,0},\qquad \tilde{A}_{21,0} = A_{21,0} + S_{23,0}\tilde{Q}_{13,0}{}^T + S_{22,0}\tilde{Q}_{12,0}{}^T,$$

$$\tilde{A}_{31,0} = A_{31,0} + S_{33,0}\tilde{Q}_{13,0}{}^T + S_{23,0}{}^T\,\tilde{Q}_{12,0}{}^T,\ \tilde{Q}_{12,0} = \hat{Q}_{12,0} + \hat{A}_{21,0},\ \tilde{Q}_{13,0} = \hat{Q}_{13,0} - \tilde{Q}_{12,0}\hat{A}_{23,0}.$$

$$\hat{A}_{12,0} = \left(\hat{A}_{13,0}A_{32,0} + \left(S_{12,0} - \hat{A}_{13,0}S_{23,0}{}^T + \left(\hat{A}_{13,0}S_{33,0} - S_{13,0}\right)\hat{A}_{23,0}{}^T\right)K_{22,0} - A_{12,0}\right)\left(\hat{A}_{22,0} - \hat{S}_{22,0}K_{22,0}\right)^{-1},$$

$$\hat{A}_{13,0} = A_{cl13,0}A_{cl33,0}^{-1},\ \hat{A}_{21,0} = \left(-A_{21,0}^T + A_{31,0}^T\hat{A}_{23,0}{}^T + \hat{Q}_{13,0}\left(-S_{23,0}{}^T + S_{33,0}\hat{A}_{23,0}{}^T\right)\right)\left(\hat{A}_{22,0} - \hat{S}_{22,0}K_{22,0}\right)^{-1}$$

$$\hat{A}_{22,0} = A_{22,0} - \hat{A}_{23,0}A_{32,0} + \left(S_{23,0} - \hat{A}_{23,0}S_{33,0}\right)\hat{Q}_{23,0}{}^T,\ \hat{A}_{23,0} = A_{cl23,0}A_{cl33,0}^{-1},$$

$$\hat{S}_{22,0} = S_{22,0} - S_{23,0}\hat{A}_{23,0}{}^T - \hat{A}_{23,0}S_{23,0}{}^T + \hat{A}_{23,0}S_{33,0}\,\hat{A}_{23,0}{}^T,$$

$$\hat{Q}_{12,0} = \left(\hat{Q}_{13,0}A_{32,0} + A_{31,0}{}^T\,\hat{Q}_{23,0}{}^T + \hat{Q}_{13,0}S_{33,0}\hat{Q}_{23,0}{}^T - Q_{12,0}\right)\left(\hat{A}_{22,0} - \hat{S}_{22,0}K_{22,0}\right)^{-1},$$

$$\hat{Q}_{13,0} = \left(A_{31,0}{}^T K_{33,0} + Q_{13,0}\right)\left(\hat{A}_{22,0} - \hat{S}_{22,0}K_{22,0}\right)^{-1},\ \hat{Q}_{23,0} = \left(A_{32,0}{}^T K_{33,0} + Q_{23,0}\right)A_{cl33,0}^{-1},$$

$$S_{ij,0} = B_{i,0}R^{-1}B_{j,0}{}^T.$$

Здесь применяются следующие обозначения $\hat{x} = x, \hat{y} = y, \hat{z} = z.$ Для того, чтобы представленные задачи имели положительно определенные матрицы коэффициентов усиления в своих регуляторах, введем условия

III. $$\begin{pmatrix} Q_{11,0} & Q_{12,0} & Q_{13,0} \\ Q_{12,0}^T & Q_{22,0} & Q_{23,0} \\ Q_{13,0}^T & Q_{23,0}^T & Q_{33,0} \end{pmatrix} > 0, R > 0,\ rank\left[B_{3,0}, A_{33,0}B_{3,0}, \ldots, A_{33,0}^{n_z-1}B_{3,0}\right] = n_z,$$

$$rank\left[Q_{33,0}^{\frac{1}{2}}, A_{33,0}Q_{33,0}^{\frac{1}{2}}, \ldots, A_{33,0}^{n_z-1}Q_{33,0}^{\frac{1}{2}}\right] = n_z,$$

$$\hat{Q}_{22,0} \geq 0,\quad rank\left[\hat{B}_{2,0}, \hat{A}_{22,0}\hat{B}_{2,0}, \ldots, \hat{A}_{22,0}^{n_y-1}\hat{B}_{2,0}\right] = n_y,\ rank\left[\hat{Q}_{22,0}^{\frac{1}{2}}, \hat{A}_{22,0}\hat{Q}_{22,0}^{\frac{1}{2}}, \ldots, \hat{A}_{22,0}^{n_y-1}\hat{Q}_{22,0}^{\frac{1}{2}}\right] = n_y,$$

$$\hat{Q}_{11,0} \geq 0,\quad rank\left[\hat{B}_{1,0}, \hat{A}_{11,0}\hat{B}_{1,0}, \ldots, \hat{A}_{11,0}^{n_x-1}\hat{B}_{1,0}\right] = n_x,\ rank\left[\hat{Q}_{11,0}^{\frac{1}{2}}, \hat{A}_{11,0}\hat{Q}_{11,0}^{\frac{1}{2}}, \ldots, \hat{A}_{11,0}^{n_x-1}\hat{Q}_{11,0}^{\frac{1}{2}}\right] = n_x. +$$

Таким образом, линейный регулятор $u^0(\psi)$ представляет собой композитное управление и при выполнении III находится как $u^0(\psi) = u_x^0 + u_y^0 + u_z^0$, где u_x^0, u_y^0, u_z^0 являются решениями задач, представленных выше. Отметим, что при этом в силу свойств стабилизирующего регулятора u_z^0 справедливо $\operatorname{Re}\lambda(A_{cl33,0}) < 0$.

Теперь выпишем уравнения для определения блоков матрицы *K*, которые зависят от *x*

$$
\begin{gathered}
K_{33,1}(x)A_{cl33,0}+A_{cl33,0}^{T}K_{33,1}(x)+K_{33,0}A_{cl33,1}(x)+A_{cl33,1}(x)^{T}K_{33,0}+K_{23,0}^{T}A_{cl23,0}+A_{cl23,0}^{T}K_{23,0}+Q_{33,1}(x)=0,\\
K_{23,1}(x)A_{cl33,0}+K_{22,0}A_{cl23,1}(x)+A_{cl32,1}(x)^{T}K_{33,0}+K_{22,1}(x)A_{cl23,0}\\
+A_{cl32,0}^{T}K_{33,1}(x)+K_{12,0}^{T}A_{cl13,0}+K_{23,0}A_{cl33,1}(x)+A_{cl22,0}^{T}K_{23,0}+Q_{23,1}(x)=0,\\
K_{22,1}(x)A_{cl22,0}+A_{cl22,0}^{T}K_{22,1}(x)+A_{cl32,0}^{T}K_{23,1}(x)^{T}+Q_{22,1}(x)+K_{23,1}(x)A_{cl32,0}+K_{12,0}^{T}A_{cl12,0}\\
+A_{cl12,0}^{T}K_{12,0}+K_{22,0}A_{cl22,1}(x)+A_{cl22,1}(x)^{T}K_{22,0}+K_{23,0}A_{cl32,1}(x)+A_{cl32,1}(x)^{T}K_{23,0}^{T}=0,\\
K_{13,1}(x)A_{cl33,0}+K_{12,1}(x)A_{cl23,0}+Q_{13,1}(x)+A_{cl31,0}^{T}K_{33,1}(x)+K_{11,1}(x)A_{cl13,0}\\
+K_{11,0}A_{cl13,1}(x)+A_{cl31,1}(x)^{T}K_{33,0}+K_{13,0}A_{cl33,1}(x)+K_{12,0}A_{cl23,1}(x)+A_{cl21,0}^{T}K_{23,0}=0,\\
K_{12,1}(x)A_{cl22,0}+A_{cl31,0}^{T}K_{23,1}(x)^{T}+K_{13,1}(x)A_{cl32,0}+K_{11,1}(x)A_{cl12,0}+K_{13,0}A_{cl32,1}(x)+A_{cl21,0}^{T}K_{22,1}(x)\\
+Q_{12,1}(x)+K_{11,0}A_{cl12,1}(x)+K_{12,0}A_{cl22,1}(x)+A_{cl11,0}^{T}K_{12,0}+A_{cl31,1}(x)^{T}K_{23,0}^{T}+A_{cl21,1}(x)^{T}K_{22,0}=0,\\
A_{cl11,0}^{T}K_{11,1}(x)+K_{11,1}(x)A_{cl11,0}+K_{13,1}(x)A_{cl31,0}+K_{12,1}(x)A_{cl21,0}+A_{cl21,0}^{T}K_{12,1}(x)^{T}+A_{cl31,0}^{T}K_{13,1}(x)^{T}+Q_{11,1}(x)\\
+A_{cl11,1}(x)^{T}K_{11,0}+K_{11,0}A_{cl11,1}(x)+K_{12,0}A_{cl21,1}(x)+A_{cl21,1}(x)^{T}K_{12,0}^{T}+K_{13,0}A_{cl31,1}(x)+A_{cl31,1}(x)^{T}K_{13,0}^{T}=0,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где $A_{cl11,0}=A_{11,0}-B_{1,0}L_x,\ A_{cl21,0}=A_{21,0}-B_{2,0}L_x,\ A_{cl31,0}=A_{31,0}-B_{3,0}L_x.$

В (8) уравнения для блоков $K_{33,1}(x), K_{22,1}(x), K_{11,1}(x)$ представляют собой уравнения Ляпунова, которые можно переписать в виде

$$
\begin{gathered}
K_{33,1}(x)A_{cl33,0}+A_{cl33,0}^{T}K_{33,1}(x)+\tilde{Q}_{33,1}(x)=0,\\
K_{22,1}(x)A_{cl22,0}+A_{cl22,0}^{T}K_{22,1}(x)+\tilde{Q}_{22,1}(x)=0,\\
K_{11,1}(x)A_{cl11,0}+A_{cl11,0}^{T}K_{11,1}(x)+\tilde{Q}_{11,1}(x)=0,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\tilde{Q}_{33,1}(x)=K_{33,0}A_{cl33,1}(x)+A_{cl33,1}(x)^{T}K_{33,0}+K_{23,0}^{T}A_{cl23,0}+A_{cl23,0}^{T}K_{23,0}+Q_{33,1}(x),\\
\tilde{Q}_{22,1}(x)=A_{cl32,0}^{T}K_{23,1}(x)^{T}+K_{23,1}(x)A_{cl32,0}+K_{12,0}^{T}A_{cl12,0}\\
+A_{cl12,0}^{T}K_{12,0}+K_{22,0}A_{cl22,1}(x)+A_{cl22,1}(x)^{T}K_{22,0}+K_{23,0}A_{cl32,1}(x)+A_{cl32,1}(x)^{T}K_{23,0}^{T}+Q_{22,1}(x),\\
\tilde{Q}_{11,1}(x)=K_{13,1}(x)A_{cl31,0}+K_{12,1}(x)A_{cl21,0}+A_{cl21,0}^{T}K_{12,1}(x)^{T}+A_{cl31,0}^{T}K_{13,1}(x)^{T}\\
+A_{cl11,1}(x)^{T}K_{11,0}+K_{11,0}A_{cl11,1}(x)+K_{12,0}A_{cl21,1}(x)+A_{cl21,1}(x)^{T}K_{12,0}^{T}+K_{13,0}A_{cl31,1}(x)\\
+A_{cl31,1}(x)^{T}K_{13,0}^{T}+Q_{11,1}(x).
\end{gathered}
$$

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda(A_{cl33,0})<0$, то с учетом дополнительных условий $\operatorname{Re}\lambda(A_{cl22,0})<0,\ \operatorname{Re}\lambda(A_{cl11,0})<0$ уравнения (9) имеют единственные решения

$$
\begin{gathered}
K_{33,1}(x)=\int_0^\infty \exp\left(A_{cl33,0}{}^{T}\sigma\right)\tilde{Q}_{33,1}(x)\exp\left(A_{cl33,0}\sigma\right)d\sigma,\\
K_{22,1}(x)=\int_0^\infty \exp\left(A_{cl22,0}{}^{T}\sigma\right)\tilde{Q}_{22,1}(x)\exp\left(A_{cl22,0}\sigma\right)d\sigma,\\
K_{11,1}(x)=\int_0^\infty \exp\left(A_{cl11,0}{}^{T}\sigma\right)\tilde{Q}_{11,1}(x)\exp\left(A_{cl11,0}\sigma\right)d\sigma.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Уравнения для оставшихся блоков являются линейными и имеют решения

$$
K_{23,1}(x)=-\tilde{Q}_{23,1}(x)A_{cl33,0}^{-1},\quad K_{13,1}(x)=-\tilde{Q}_{13,1}A_{cl33,0}^{-1},\quad K_{12,1}(x)=-\tilde{Q}_{12,1}(x)A_{cl22,0}^{-1},
\tag{11}
$$

где

$$\tilde{Q}_{12,1}(x) = A_{cl31,0}^T K_{23,1}(x)^T + K_{13,1}(x) A_{cl32,0} + K_{11,1}(x) A_{cl12,0} + K_{13,0} A_{cl32,1}(x) + A_{cl21,0}^T K_{22,1}(x)$$
$$+K_{11,0} A_{cl12,1}(x) + K_{12,0} A_{cl22,1}(x) + A_{cl11,0}^T K_{12,0} + A_{cl31,1}(x)^T K_{23,0}^T + A_{cl21,1}(x)^T K_{22,0} + Q_{12,1}(x)$$
$$\tilde{Q}_{23,1}(x) = K_{22,0} A_{cl23,1}(x) + A_{cl32,1}(x)^T K_{33,0} + K_{22,1}(x) A_{cl23,0}$$
$$+A_{cl32,0}^T K_{33,1}(x) + K_{12,0}^T A_{cl13,0} + K_{23,0} A_{cl33,1}(x) + A_{cl22,0}^T K_{23,0} + Q_{23,1}(x),$$
$$\tilde{Q}_{13,1}(x) = K_{12,1}(x) A_{cl23,0} + A_{cl31,0}^T K_{33,1}(x) + K_{11,1}(x) A_{cl13,0}$$
$$+K_{11,0} A_{cl13,1}(x) + A_{cl31,1}(x)^T K_{33,0} + K_{13,0} A_{cl33,1}(x) + K_{12,0} A_{cl23,1}(x) + A_{cl21,0}^T K_{23,0} + Q_{13,1}(x).$$

Поскольку критерий *(2)* играет в исходной задаче вспомогательную роль, воспользуемся подходом коррекции функционала из [12,13]. Выберем зависящие матрицы критерия таким образом, чтобы уравнения (10) имели положительно определенные решения. Иными словами, потребуем выполнение условий

IV. $K_{33,1}(x) > 0,\ K_{22,1}(x) > 0,\ K_{11,1}(x) > 0$ в области G.

Отметим, что в силу ограниченности матриц в (9), это всегда можно осуществить при достаточно больших $Q_{33,1}(x) > 0, Q_{22,1}(x) > 0, Q_{11,1}(x) > 0.$

Полученные аналитические представления (10) и (11) существенно снижают вычислительную сложность нахождения управления по сравнению с традиционным подходом SDRE.

Введем условия

V. $\operatorname{Re}\lambda(A_{cl22,0}) < 0,\ \operatorname{Re}\lambda(A_{cl11,0}) < 0.$

$$V(\psi,t,\varepsilon) = \psi^T \begin{pmatrix} K_{11,0} & \varepsilon K_{12,0} & \varepsilon^2 K_{13,0} \\ \varepsilon K_{12,0}{}^T & \varepsilon K_{22,0} & \varepsilon^2 K_{23,0} \\ \varepsilon^2 K_{13,0}{}^T & \varepsilon^2 K_{23,0}{}^T & \varepsilon^2 K_{33,0} \end{pmatrix} \psi > 0, \quad \forall\, \psi \neq 0,$$

Теперь при выполнении I-V с помощью функции Ляпунова в виде квадратичной формыможно установить при достаточно малых ε асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия замкнутой системы (1),(6). Кроме того, используя результаты [14], можно получить оценки близости блоков K, найденных с помощью предложенного алгоритма, к их точным значениям. Иными словами, справедлива

Теорема. Пусть выполнены условия I-V. Тогда существует достаточно малое число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в области G справедливо

1) Для любого фиксированного $x \in X$ уравнения (8) имеют решения, причем верны оценки

$$\|K_{11}(x,\varepsilon) - (K_{11,0} + \varepsilon K_{11,1}(x))\| = O(\varepsilon^2), \quad \|K_{12}(x,\varepsilon) - (K_{12,0} + \varepsilon K_{12,1}(x))\| = O(\varepsilon^2),$$
$$\|K_{13}(x,\varepsilon) - (K_{13,0} + \varepsilon K_{13,1}(x))\| = O(\varepsilon^2), \quad \|K_{22}(x,\varepsilon) - (K_{22,0} + \varepsilon K_{22,1}(x))\| = O(\varepsilon^2),$$
$$\|K_{23}(x,\varepsilon) - (K_{23,0} + \varepsilon K_{23,1}(x))\| = O(\varepsilon^2), \quad \|K_{33}(x,\varepsilon) - (K_{33,0} + \varepsilon K_{33,1}(x))\| = O(\varepsilon^2),$$

где блоки $K_{11}(x,\varepsilon), K_{i,2}(x,\varepsilon), K_{i,3}(x,\varepsilon), i = 1,2,\ j = 1,2,3,$ соответствуют точному решению *(4)*;

2) Для любого фиксированного $\psi \in \Psi$ верно

$\|u(\psi) - u^0(\psi)\| = O(\varepsilon), \quad \|u(\psi) - u^c(\psi)\| = O(\varepsilon^2),$

где $u(\psi)$ - управление, полученное на основе точного решения (4);

3) Регуляторы $u^0(\psi)$ и $u^c(\psi)$ являются стабилизирующими. ■

3 Численные эксперименты

Рассмотрим задачу стабилизации системы вида (1) со следующими матрицами

$$A_{11,0}=0,\ A_{12,0}=1,\ A_{13,0}=0,\qquad B_{1,0}=0,$$
$$A_{21,0}=-1,\ A_{22,0}=1,\ A_{23,0}=1,\qquad B_{2,0}=1,$$
$$A_{31,0}=1,\ A_{32,0}=-1,\ A_{33,0}=1,\qquad B_{3,0}=-2,$$
$$A_{11,1}(x)=0,\ A_{12,1}(x)=0,\ A_{13,1}(x)=0,\qquad B_{1,1}(x)=0,$$
$$A_{21,1}(x)=\cos(x(t))-2,\ A_{22,1}(x)=\sin(x(t))+2,\ A_{23,1}(x)=0\qquad B_{2,1}(x)=\sin(x(t)),$$
$$A_{31,1}(x)=x(t),\ A_{32,1}(x)=0,\ A_{33,1}(x)=0,\qquad B_{3,1}(x)=\sin(x(t)).$$

Зададим критерий *(2)* с помощью

$$Q_{11,0}=80, Q_{12,0}=0, Q_{13,0}=0,\qquad Q_{11,1}(x)=0, Q_{12,1}(x)=0, Q_{13,1}(x)=0,$$
$$Q_{22,0}=15, Q_{23,0}=0, Q_{33,0}=40,\qquad Q_{22,1}(x)=0, Q_{23,1}(x)=0, Q_{33,1}(x)=0,\ R=1.$$

Чтобы оценить эффективность предложенного подхода, для данной задачи с постоянным критерием построим три регулятора: линейное композитное управление u^0, композитное управление с нелинейной коррекцией u^c и управление на основе точного решения *(4)*, которое будем обозначать как u^{SDRE}. На Рис. 1. представлены траектории замкнутых систем вдоль трех регуляторов при ε = 0.3, $x(0) = -2$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1$.

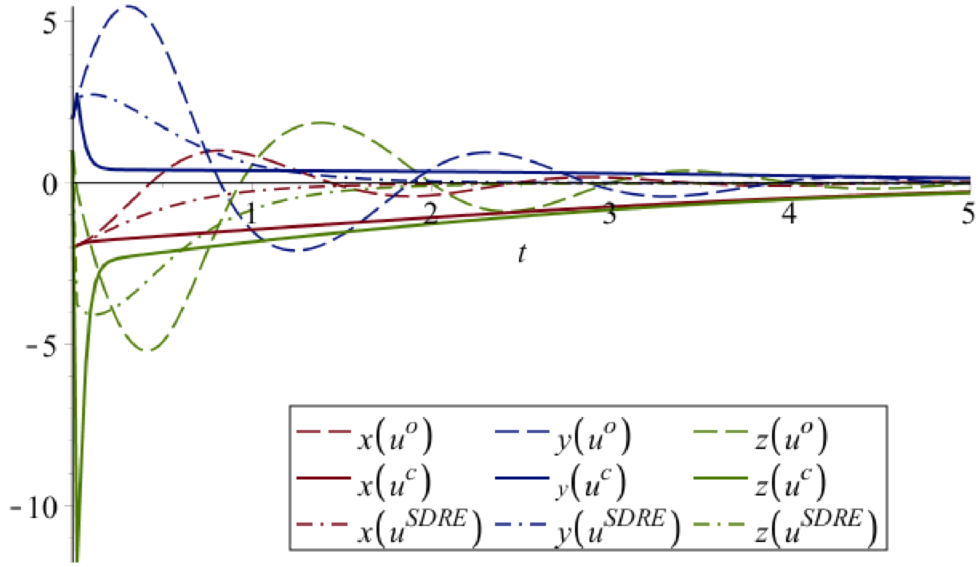

Рис. 1. Траектории замкнутых систем при ε=0.3

Как видно, все три регулятора обеспечивают устойчивость нулевого положения равновесия. Значения критерия *(2)* вдоль траекторий замкнутой системы с исследуемыми регуляторами при различных ε представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Значения критерия J для различных управлений

ε	$J(u^0)$	$J(u^c)$	$J(u^{SDRE})$
0.3	*219.613*	*149.265*	*114.827*
0.1	*69.388*	*64.382*	*61.750*
0.01	*47.36243*	*47.29623*	*47.29592*

Как и следует из теоремы, с уменьшением *ε* значения $J(u^0)$ и $J(u^c)$ стремятся к $J(u^{SDRE})$. При этом регулятор с нелинейной коррекцией эффективней по рассматриваемому критерию, чем без нее. Выигрыш u^c перед u^0 возрастает с увеличением значения параметра и при ε = 0.3 составляет около 60%, если за 100% принимать $J(u^{SDRE})$. Дальнейшее увеличение ε приводит к нарушению условий работоспособности построенных регуляторов и замкнутые системы теряют устойчивость.

Заключение

В работе предложен способ построения стабилизирующего регулятора для слабо нелинейной сингулярно возмущенной системы, содержащей три группы движений. Метод основан на технике SDRE, согласно которой управление ищется в стандартном для линейно-квадратичной задачи виде, но с зависящими от вектора состояния матрицами. Согласно предложенному подходу, сначала находится линейное композитное управление, а затем его нелинейная коррекция, для которой получены аналитические представления. Такой численно-аналитический алгоритм приближенного решения исходной задачи обладает меньшей вычислительной сложностью, чем стандартная техника SDRE. Проведенные вычислительные эксперименты продемонстрировали работоспособность и эффективность предложенного алгоритма.

Литература

1. *Naidu D.S., Calise A.J.* Singular Perturbations and Time Scales in Guidance and Control of Aerospace Systems // A Survey Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2001. Vol. 24(6). Pp. 1057-1078.
2. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. Москва: Физматлит, 2009. 255 с.
3. *Грибковская И.В., Дмитриев М.Г.* Управляемость в больших социально-экономических систем с позиции разделения движений // В сб. «Теория активных систем. Труды межд. Научно-практической конференции (14-16 ноября 2011 г., Москва. Россия). Том 2». М.: ИПУ, 2011.
4. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31(73). №3. С. 575–586.
5. *Градштейн И.С.* Применение теории устойчивости А.М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Матем. сб. 1953. Том 32(74). № 2. С. 263–286.
6. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. №4. С. 611–642.
7. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982-2004 гг. // Автоматика и телемеханика. 2006. №1. С. 3-53.
8. *Kurina G., Kalashnikova M.*, “High Order Asymptotic Solution of Linear-Quadratic Optimal Control Problems Under Cheap Controls With Two Different Costs” // Proceedings of 21St International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2017. Pp. 499-504.
9. *Nekoo S. R.* Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation //Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 8(2). Pp. 109-166.
10. *Çimen T.* Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35. №. 4. Pp. 1025-1047.
11. *Cloutier J.R.* State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview // Proc. American Control Conference. 1997. Vol. 2. Pp. 932-936.
12. *Dmitriev M.G., Makarov D.A.* The stabilizing composite control in a weakly nonlinear singularly perturbed control system // Proceeding of 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2017. Pp. 594 – 599.
13. *Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.* Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния. // Труды Института системного анализа РАН. Том 64. №4. 2014. С. 53-58.
14. *Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П., Рутиц-кий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.