DOI:

# ПОСТРОЕНИЕ ПАДЕ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ[1]

**Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г.**

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва, просп. 60-летия октября д.9*

yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

*Аннотация: Рассматривается задача стабилизации для сингулярно возмущенной линейной стационарной системы с квадратичным критерием качества. Параметр при производной используется для разложения в ряд решения уравнения Риккати и весовой матрицы при векторе состояния в критерии. Строится формальное асимптотическое разложение для решения уравнения Риккати второго порядка для малых значений параметра, качество которого улучшается за счет использования одноточечной Паде аппроксимации. Использование Паде аппроксимации в ряде случаев позволяет повысить точность асимптотического приближения и даже расширить его допустимую область.*

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, сингулярные возмущения, малый параметр, Паде аппроксимация.

## Введение

Применение теории сингулярных возмущений к анализу и приближенному решению задач управления с быстрыми и медленными движениями без ограничений на управление активно изучается в литературе (см. обзоры [1-4]). При этом сначала исследовались линейно-квадратичные задачи и доминировали результаты о предельном переходе [5] , затем появились работы, связанные с построением равномерных асимптотических приближений, то есть учитывались пограничные слои у быстрых переменных [6]. Стабилизирующее управление при этом находится путем решения алгебраического или дифференциального уравнений Риккати. В основе подхода лежит приближенное нахождение решения этих уравнений для матриц коэффициентов усиления с помощью построения асимптотических приближений. Также на основе анализа асимптотики может быть построен композитный регулятор на основе регуляторов для подсистем быстрых и медленных движений [7].

Помимо основных результатов теории сингулярных возмущений (теорема А.Н. Тихонова о предельном переходе и метод пограничных функций А.Б. Васильевой [8]) в теории управления для построения стабилизирующих регуляторов в задачах с малым параметром также использовались методы Паде аппроксимации [9-10]. В работе [10], в частности, строятся Паде аппроксимации для решения матричных алгебраических уравнений Риккати на основе одного или нескольких асимптотических разложений. Практические расчеты показывают, что даже одноточечные Паде аппроксимации на основе одной асимптотики способны значительно увеличить интервал экстраполяции и улучшить качество приближения к точному решению по сравнению с асимптотикой.

Здесь для задачи стабилизации сингулярно возмущенной линейной стационарной системы впервые строится одноточечная матричная Паде аппроксимация для блочной матрицы решения уравнения Риккати на основе асимптотики при малых значениях параметра второго порядка. Ранее одноточечные матричные Паде аппроксимации решения уравнения Риккати применялись для регулярно возмущенных линейных и нелинейных задач управления. Разрешимость получающихся уравнений и корректность применения результатов теории сингулярных возмущений обеспечивается естественными условиями, связанными с условиями типа управляемости/наблюдаемости для задач декомпозиции и подбора весовых матриц критерия оптимальности. Теоретические результаты демонстрируются на численных расчетах.

## 1 Постановка задачи

Рассматривается сингулярно возмущенная линейная стационарная система

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + A_2 y + B_1 u, \qquad (1)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A_3 x + A_4 y + B_2 u,$$

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-37-20032 мол_а_вед).*

где $x(0)=x^0,\ y(0)=y^0,\ \ x\in\mathrm{R}^{n_1}, y\in\mathrm{R}^{n_2}, z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, z\in\mathrm{R}^n,\ n_1+n_2=n,\ u\in\mathrm{R}^r,\ \varepsilon\in(0,\infty)$,

$$(2)\qquad J(u)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(z^T Q(\varepsilon)z+u^T Ru\right)dt\to\min_u,$$

где $Q=\begin{pmatrix} Q_1(\varepsilon) & Q_2(\varepsilon) \\ Q_2^T(\varepsilon) & Q_3(\varepsilon) \end{pmatrix}>0,\ Q_i(\varepsilon)=Q_{i0}+\varepsilon Q_{i1}+\varepsilon^2 Q_{i2},\ i=1,2,3,\ R>0$ подбираются так, чтобы для некоторого интервала изменения параметра $\varepsilon$ построить семейство регуляторов с нужными свойствами в виде

$$(3)\qquad u(x,\varepsilon)=-R^{-1}B^T(\varepsilon)K(\varepsilon)x,$$

где матрица коэффициентов усиления $K(\varepsilon)$ есть решение матричного алгебраического уравнения Риккати

$$(4)\qquad -A^T(\varepsilon)K(\varepsilon)-K(\varepsilon)A(\varepsilon)+K(\varepsilon)B(\varepsilon)R^{-1}B^T(\varepsilon)K(\varepsilon)-Q(\varepsilon)=0,$$

$$A(\varepsilon)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \dfrac{A_3}{\varepsilon} & \dfrac{A_4}{\varepsilon} \end{pmatrix},\ B(\varepsilon)=\begin{pmatrix} B_1 \\ \dfrac{B_2}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Здесь представим

$$(5)\quad K(\varepsilon)=\begin{pmatrix} K_1(\varepsilon) & \varepsilon K_2(\varepsilon) \\ \varepsilon K_2^T(\varepsilon) & \varepsilon K_3(\varepsilon) \end{pmatrix},\ K_i(\varepsilon)=K_{i0}+\varepsilon K_{i1}+\varepsilon^2 K_{i2},\ i=1,2,3.$$

В итоге система для блоков, предложенная в [5] имеет вид

$$-\left(A_1^T-K_2(\varepsilon)B_2R^{-1}B_1^T\right)K_1(\varepsilon)-K_1(\varepsilon)\left(A_1-B_1R^{-1}B_2^TK_2(\varepsilon)^T\right)+$$
$$+K_1(\varepsilon)B_1R^{-1}B_1^TK_1(\varepsilon)-A_3^TK_2(\varepsilon)^T-K_2(\varepsilon)A_3+K_2(\varepsilon)B_2R^{-1}B_2^TK_2(\varepsilon)^T-Q_1(\varepsilon)=0,$$

$$-K_2(\varepsilon)\left(A_4-B_2R^{-1}B_2^TK_3(\varepsilon)\right)-A_3^TK_3(\varepsilon)-K_1(\varepsilon)A_2+$$
$$+K_1(\varepsilon)B_1R^{-1}B_2^TK_3(\varepsilon)-Q_2(\varepsilon)-\varepsilon\left[\left(A_1^T-K_1(\varepsilon)B_1R^{-1}B_1^T\right)K_2(\varepsilon)-K_2(\varepsilon)B_2R^{-1}B_1^TK_2(\varepsilon)\right]=0,$$

$$-A_4^TK_3(\varepsilon)-K_3(\varepsilon)A_4+K_3(\varepsilon)B_2R^{-1}B_2^TK_3(\varepsilon)-Q_3(\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon\left[\left(A_2^T-K_3(\varepsilon)B_2R^{-1}B_1^T\right)K_2(\varepsilon)+K_2(\varepsilon)^T\left(A_2-B_1R^{-1}B_2^TK_3(\varepsilon)\right)\right]+\varepsilon^2K_2(\varepsilon)^TB_1R^{-1}B_1^TK_2(\varepsilon)=0.$$

Пусть выполняется условие

*I.* Тройка матриц $A(\varepsilon),B(\varepsilon),Q(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ управляема и наблюдаема при всех $\varepsilon\in(0,\infty)$.

## 2 Асимптотика решения уравнения Риккати при малых значениях параметра

Для блоков нулевого порядка $K_{10},K_{20},K_{30}$ уравнения имеют вид уравнений Риккати для $K_{10},K_{30}$ и линейного алгебраического уравнения для $K_{20}$. Введем дополнительные условия

*II.* Тройка матриц $A_4,B_2,Q_{30}^{\frac{1}{2}}$ управляема и наблюдаема.

*III.* Тройка матриц $\hat{A},\hat{B},\hat{Q}^{\frac{1}{2}}$ управляема и наблюдаема.

Далее будем подбирать матрицы $Q_{10},Q_{20},Q_{30}$ с учетом условий *II, III* с целью обеспечения разрешимости уравнений Риккати, определяющих регуляторы в соответствующих задачах декомпозиции.

| Предельная (вырожденная) задача декомпозиции для медленных движений имеет вид | Задача декомпозиции для быстрой переменной |
|---|---|
| $\dot{\bar{x}} = \hat{A}\bar{x} + \hat{B}\bar{u}$, $I(\bar{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\bar{x}^T \hat{Q}\bar{x} + \bar{u}^T R\bar{u})dt$ | $\dot{\bar{y}} = A_4\bar{y} + B_2 v$, $I(v) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\bar{y}^T Q_{30}\bar{y} + v^T Rv)dt$ |

В приведенных задачах декомпозиции при условиях *II* и *III* соответствующие уравнения для матриц коэффициентов усиления $K_{10}, K_{30}$ имеют вид (6),(7)

$$(6)\quad -\hat{A}^T K_{10} - K_{10}\hat{A} + K_{10}\hat{B}R^{-1}\hat{B}^T K_{10} - \hat{Q} = 0,$$

$$(7)\quad -A_4^{\ T} K_{30} - K_{30}A_4 + K_{30}B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{30} - Q_{30} = 0,$$

*где*

$$\hat{A} = (A_1 - B_1 R^{-1}B_2^{\ T}E_2^{\ T} + E_1A_3 + E_1B_2R^{-1}B_2^{\ T}E_2^{\ T}),\ \hat{B} = B_1^{\ T} + E_1B_2,\ \hat{Q} = E_2A_3 + A_3^{\ T}E_2^{\ T} - E_2B_2R^{-1}B_2^{\ T}E_2^{\ T} + Q_{10},$$

$$K_{20} = E_2 + K_{10}E_1, E_1 = -\left(A_2 - B_1 R^{-1}B_2^{\ T}K_{30}\right)\left(A_4 - B_2 R^{-1}B_2^{\ T}K_{30}\right)^{-1},\ E_2 = \left(-A_3^{\ T}K_{30} - Q_{20}\right)\left(A_4 - B_2 R^{-1}B_2^{\ T}K_{30}\right)^{-1}$$

Теперь формулируются требования для подбора блоков матриц $Q_1(\varepsilon), Q_2(\varepsilon), Q_3(\varepsilon)$ , которые будут обеспечивать разрешимость уравнений Ляпунова.

Блоки матриц $Q_1(\varepsilon), Q_2(\varepsilon), Q_3(\varepsilon)$ подбираются так, что

*IV.* Матрицы $Q_1(\varepsilon), Q_2(\varepsilon), Q_3(\varepsilon)$ положительно определенные,

*V.* $\operatorname{Re}\lambda(A_1 - B_1 R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T} - B_1 R^{-1}B_1^{\ T}K_{10}^{\ T} - E_1(-A_3 + B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{10} + B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T})) < 0,$

*VI.* $\operatorname{Re}\lambda(A_1 - B_1 R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T} - B_1 R^{-1}B_1^{\ T}K_{10}^{\ T} - E_4(-A_3 + B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{10} + B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T})) < 0,$

*VII.* $A_2^{\ T}K_{20} + K_{20}^{\ T}A_2 - K_{20}^{\ T}B_1R^{-1}B_2^{\ T}K_{30} - K_{30}B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{20} + Q_{31} > 0,$

*VIII.* $-(K_{10}B_1 R^{-1}B_2^{\ T} + K_{20}B_2R^{-1}B_2^{\ T} - A_3^{\ T})E_3^{\ T} - E_3(-A_3 + B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{10} + B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T}) + Q_{11} > 0,$

*IX.* $$A_2^{\ T}K_{21} + K_{21}^{\ T}A_2 - K_{20}^{\ T}B_1R^{-1}B_2^{\ T}K_{31} - K_{31}B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{20} - K_{31}B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{31} -$$
$$-K_{21}^{\ T}B_1R^{-1}B_2^{\ T}K_{30} - K_{30}B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{21} - K_{20}B_1R^{-1}B_1^{\ T}K_{20} + Q_{32} > 0,$$

*X.* $$-(K_{10}B_1 R^{-1}B_2^{\ T} + K_{20}B_2R^{-1}B_2^{\ T} - A_3^{\ T})E_5^{\ T} - E_5(-A_3 + B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{10} + B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T}) -$$
$$-K_{21}(B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{11} + B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{21}^{\ T}) - K_{11}(B_1R^{-1}B_1^{\ T}K_{11} + B_1R^{-1}B_2^{\ T}K_{21}^{\ T}) + Q_{12} > 0.$$

Тогда уравнения Ляпунова для блоков $K_{11}, K_{31}$, имеющие вид

$$-\left(A_1^T - K_{20}B_2R^{-1}B_1^{\ T} - K_{10}B_1R^{-1}B_1^{\ T} - (K_{10}B_1 R^{-1}B_2^{\ T} + K_{20}B_2R^{-1}B_2^{\ T} - A_3^{\ T})E_1^{\ T}\right)K_{11} -$$
$$-K_{11}\left(A_1 - B_1 R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T} - B_1 R^{-1}B_1^{\ T}K_{10}^{\ T} - E_1(-A_3 + B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{10} + B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T})\right) +$$
$$+(K_{10}B_1 R^{-1}B_2^{\ T} + K_{20}B_2R^{-1}B_2^{\ T} - A_3^{\ T})E_3^{\ T} + E_3(-A_3 + B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{10} + B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{20}^{\ T}) - Q_{11} = 0$$

$$-(A_4^{\ T} - K_{30}B_2R^{-1}B_2^{\ T})K_{31} - K_{31}(A_4 - B_2R^{-1}B_2^{\ T}K_{30}) - A_2^{\ T}K_{20} - K_{20}^{\ T}A_2 + K_{20}^{\ T}B_1R^{-1}B_2^{\ T}K_{30} +$$
$$+K_{30}B_2R^{-1}B_1^{\ T}K_{20} - Q_{31} = 0,$$

где

$$K_{21} = K_{11}E_1 + E_3,\ E_1 = -(A_2 - B_1 R^{-1}B_2^{\ T}K_{30})\left(A_4 - B_2 R^{-1}B_2^{\ T}K_{30}\right)^{-1},\ E_3 = (-A_3^{\ T}K_{31} + K_{10}B_1 R^{-1}B_2^{\ T}K_{31} +$$
$$+K_{20}B_2 R^{-1}B_2^{\ T}K_{31} - A_1^{\ T}K_{20} + K_{10}B_1 R^{-1}B_1^{\ T}K_{20} + K_{20}B_2 R^{-1}B_1^{\ T}K_{20} - Q_{21})\left(A_4 - B_2 R^{-1}B_2^{\ T}K_{30}\right)^{-1},$$

разрешимы и соответствующие матрицы являются положительно определенными.

Уравнения Ляпунова для блоков $K_{12}, K_{32}$, имеющие вид

$$-\left(A_1^T - K_{20}B_2R^{-1}B_1^T - K_{10}B_1R^{-1}B_1^T - (K_{10}B_1 R^{-1}B_2^T + K_{20}B_2R^{-1}B_2^T - A_3^T)E_4^T\right)K_{12} -$$
$$-K_{12}\left(A_1 - B_1 R^{-1}B_2^T K_{20}^T - B_1 R^{-1}B_1^T K_{10}^T - E_4(-A_3 + B_2R^{-1}B_1^T K_{10} + B_2R^{-1}B_2^T K_{20}^T)\right) +$$
$$+(K_{10}B_1 R^{-1}B_2^T + K_{20}B_2R^{-1}B_2^T - A_3^T)E_5^T + E_5(-A_3 + B_2R^{-1}B_1^T K_{10} + B_2R^{-1}B_2^T K_{20}^T) +$$
$$+K_{21}(B_2R^{-1}B_1^T K_{11} + B_2R^{-1}B_2^T K_{21}^T) + K_{11}(B_1R^{-1}B_1^T K_{11} + B_1R^{-1}B_2^T K_{21}^T) - Q_{12} = 0$$

$$-(A_4^T - K_{30}B_2R^{-1}B_2^T)K_{32} - K_{32}(A_4 - B_2R^{-1}B_2^T K_{30}) -$$
$$-A_2^T K_{21} - K_{21}^T A_2 + K_{20}^T B_1R^{-1}B_2^T K_{31} + K_{31}B_2R^{-1}B_1^T K_{20} + K_{31}B_2R^{-1}B_2^T K_{31} + K_{21}^T B_1R^{-1}B_2^T K_{30} +$$
$$+K_{30}B_2R^{-1}B_1^T K_{21} + K_{20}B_1R^{-1}B_1^T K_{20} - Q_{32} = 0\ ,$$

где

$$K_{22} = K_{12}E_4 + E_5, E_4 = -(A_2 - B_1 R^{-1}B_2^T K_{31})\left(A_4 - B_2 R^{-1}B_2^T K_{30}\right)^{-1},$$
$$E_5 = (-A_3^T K_{32} - A_1^T K_{21} + K_{10}B_1 R^{-1}B_2^T K_{32} + K_{20}B_2 R^{-1}B_2^T K_{32} + K_{10}B_1 R^{-1}B_1^T K_{21} + K_{11}B_1 R^{-1}B_2^T K_{31} +$$
$$+K_{11}B_1 R^{-1}B_1^T K_{20} + K_{21}B_2 R^{-1}B_2^T K_{31} + K_{21}B_2 R^{-1}B_1^T K_{20} + K_{20}B_2 R^{-1}B_1^T K_{21} - Q_{22})\left(A_4 - B_2 R^{-1}B_2^T K_{30}\right)^{-1},$$

при этих условиях также разрешимы и соответствующие матрицы являются положительно определенными.

Итак, здесь можно построить асимптотическое приближение второго порядка

$$(8)\quad \tilde{K}(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 = \begin{pmatrix} K_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} K_{11} & K_{20} \\ K_{20}^T & K_{30} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} K_{12} & K_{21} \\ K_{21}^T & K_{31} \end{pmatrix}.$$

*XI.* Матрицы $\begin{pmatrix} K_{11} & K_{20} \\ K_{20}^T & K_{30} \end{pmatrix} > 0, \begin{pmatrix} K_{12} & K_{21} \\ K_{21}^T & K_{31} \end{pmatrix} > 0.$

Условие *XI* подразумевает согласование нулевого и первого, а также первого и второго приближений.

Теперь можно сформулировать утверждение

**Теорема**. Если найдутся блоки матриц $Q_1(\varepsilon), Q_2(\varepsilon), Q_3(\varepsilon)$, представленные в виде разложений $Q_i(\varepsilon) = Q_{i0} + \varepsilon Q_{i1} + \varepsilon^2 Q_{i2}$, $i = 1,2,3$, удовлетворяющие условиям II-XI, то приближение (8) существует.

### 3 Одноточечная Паде аппроксимация

Теперь, используя асимптотику второго порядка для решения уравнения Риккати, можно построить одноточечную Паде аппроксимацию $K(\varepsilon)$ порядка [1/2], а именно $PA_{[1/2]}(\varepsilon) = \left(M_0 + \varepsilon M_1\right)\left(I + \varepsilon N_1 + \varepsilon^2 N_2\right)^{-1}$, где $I$ –*nxn* единичная матрица. Неизвестные коэффициенты находятся из системы $PA_{[1/2]}(\varepsilon) = \tilde{K}(\varepsilon)$. Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon^0 : M_0 = K_0; \\ &\varepsilon^1 : M_1 = K_0 N_1 + K_1; \\ &\varepsilon^2 : 0 = K_0 N_2 + K_1 N_1 + K_2; \\ &\varepsilon^3 : 0 = K_1 N_2 + K_2 N_1 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -K_0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_1(x) & -K_0 \\ 0 & 0 & K_2(x) & K_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1(x) \\ N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1(x) \\ K_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введем регулятор $u(\varepsilon) = -R^{-1}B^T(\varepsilon)K_{[1/2]}(\varepsilon)x$, где $K_{[1/2]}(\varepsilon) = \dfrac{\left(PA_{[1/2]}(\varepsilon) + PA^T_{[1/2]}(\varepsilon)\right)}{2}$ – положительно определенная матрица. Условия существования Паде аппроксимации и Паде регулятора см. в [10].

Из представления Паде аппроксимации и формы (8), возможного существования нулей «знаменателя» очевидно, что есть интервал изменения $\varepsilon$, для которого обеспечивается существование этого представления. В случае одноточечной Паде аппроксимации можно говорить об интервале $(0, a]$, где $a$ – конкретное положительное число, и изучать условия при которых он увеличивается.

Здесь также можно говорить об условиях, гарантирующих знакоопределенность всех составляющих Паде регулятора.

## 4 Численный пример

Сравнение трех регуляторов, линейно-квадратичного регулятора, Паде регулятора и регулятора на основе асимптотики ведется на примере из (Пример 2, стр. 20 в [5]) с матрицами критерия

$$Q_{10} = Q_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ Q_{20} = Q_{21} = Q_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q_{30} = Q_{31} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ Q_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_{32} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

*Таблица 1. Сравнение регуляторов по значению критерия*

| Управление / ε | Линейно-квадратичный регулятор | Паде | Асимптотика при малых значениях параметра |
|---|---|---|---|
| 0,01 | 631,8 | 700,4 | 700,4 |
| 0,11 | 698,3 | 765,6 | 765,7 |
| 0,21 | 765,4 | 830,6 | 831,3 |
| 0,31 | 832,8 | 894,7 | 897,2 |
| 0,41 | 900,7 | 955,4 | 963,6 |
| 0,51 | 969,0 | 1007,3 | 1030,4 |
| 0,61 | 1037,5 | 1040,1 | 1097,7 |
| 0,71 | 1106,4 | 1124,4 | 1165,3 |

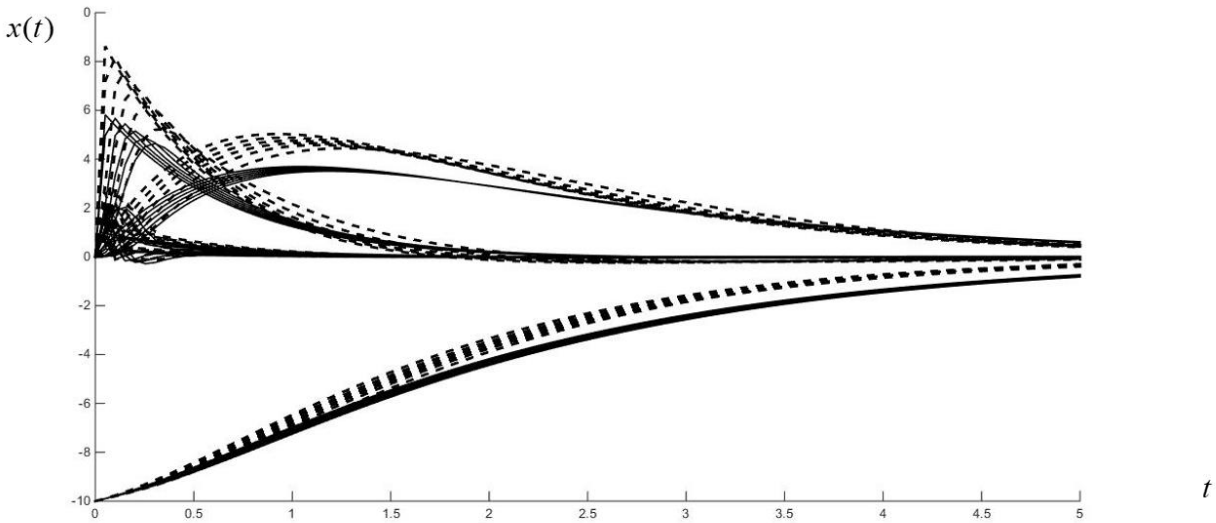



*Рис. 1. Траектории вдоль линейно-квадратичного регулятора (сплошная линия) и Паде регулятора (пунктирная линия) при разных значениях параметра*

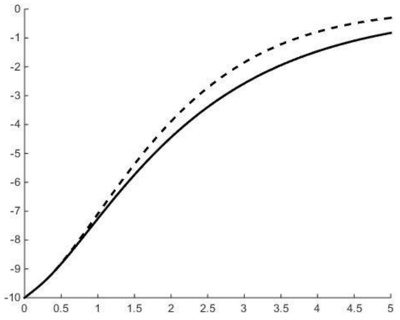
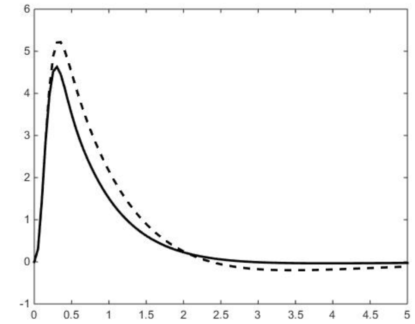
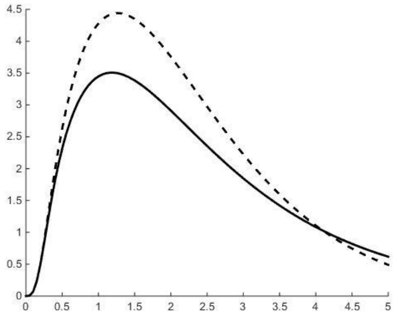
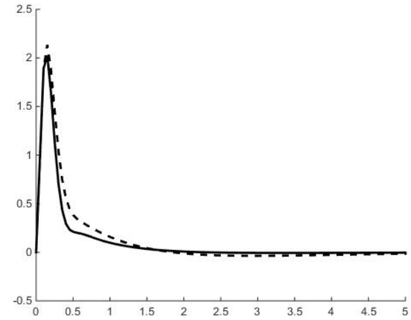
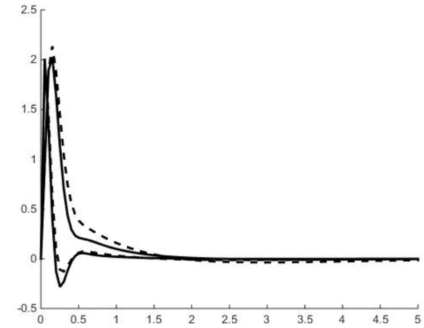
| Медленные переменные | Быстрые переменные |
|---|---|
|  |  |
|  |  |
|  | |

*Рис. 2. Траектории вдоль линейно-квадратичного регулятора (сплошная линия) и Паде регулятора (пунктирная линия) при* $\varepsilon = 0{,}51$

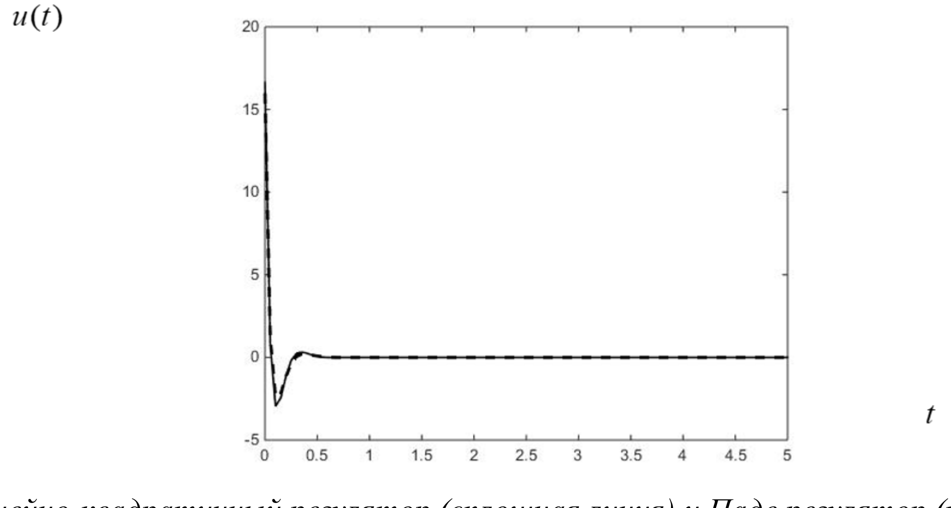



*Рис. 3. Линейно-квадратичный регулятор (сплошная линия) и Паде регулятор (пунктирная линия) при* $\varepsilon = 0{,}51$.

## Заключение

Здесь для задачи стабилизации сингулярно возмущенной линейной стационарной системы построена асимптотика при малых значениях параметра второго порядка блочной матрицы решения алгебраического уравнения Риккати. Введены условия на разрешимость получающихся уравнений и подбор весовых матриц критерия оптимальности. Впервые для сингулярно возмущенных задач оптимального управления построена и применена одноточечная матричная Паде аппроксимация для решения уравнения Риккати на основе асимптотики при малых значениях параметра. Численные расчеты в данном примере показали, что одноточечная Паде аппроксимация позволила построить более точное приближение к решению уравнения Риккати, чем асимптотика и получить соответствующий стабилизирующий Паде регулятор.

## Литература


1. *Kokotovic P.V., O'Malley Jr R.E., Sannuti P.* Singular perturbations and order reduction in control theory—an overview // Automatica. Vol. 12. 1976, №. 2. – P. 123-132.
2. *Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G.* Singular perturbations and some optimal control problems // IFAC Proceedings Volumes. Vol. 11. 1978. – P.  963–966.
3. *Kokotovic P.V., Khalil H.K.* Singular perturbations in systems and control. IEEE press. 1986.
4. *Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G.* Singular perturbations in optimal control problems // Journal of Soviet Mathematics. Vol. 34. 1986,  №. 3. – P. 1579-1629.
5. *Sannuti P., Kokotovic P.* Near-optimum design of linear systems by a singular perturbation method // IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 14. 1969, №. 1. – P. 15-22.
6. *Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в линейной задаче управления с квадратичным функционалом // Дифференциальные уравнения. Т. 11. 1975, №. 11. – С. 1915-1921.
7. *Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.* Построение стабилизирующих регуляторов в нелинейных непрерывных системах большой размерности на основе асимптотики решений матричных алгебраических уравнений Риккати // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2018): материалы Одиннадцатой междунар. конфер., 1 - 3 окт. 2018 г., Москва. – М.: ИПУ РАН, 2018. – С. 351-353.
8. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – Высш. шк, 1990.
9. *Belyaeva N.P., Dmitriev M.G., Komarova E.V.* Pade-approximation as a "bridge" between two parametric boundary asymptotics // IFAC Proceedings Volumes. Vol. 34. 2001, №. 6. – P. 605-609.
10. *Danik Yu.E., Dmitriev M.G.* Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution // IFAC-PapersOnLine. Vol. 51. 2018. – P. 815-820.