DOI:

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ТЕОРИИ ИГР

Гатауллин Т.М.,
ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», центр цифровой экономики, кафедра математических методов в экономике и управлении, Россия, г. Москва.
gataullin@inbox.ru,
Гатауллин С.Т.,
ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий,
gataullin 097@ gmail.com,
Иванова К.В.
ФГБОУ ВО «Государственный университет управления»
ivanovazinia@gmail.com

Аннотация: в работе некоторые понятия теории игр рассматриваются с точки зрения синергетических эффектов участия игроков в этих играх и дается количественная оценка этих синергетических эффектов на примере кооперативных игр, которые представляют собой математическая модель, описывающую многообразные процессы, связанные с распределением денежных сумм между участниками согласно их положению и силе участия в этих процессах.

Ключевые слова: синергия, коалиции, теория игр, вектор Шепли.

Введение

Термин «синергия» обозначает фундаментальное свойство экономики и, даже более широко, - всей человеческой цивилизации. Сегодня есть два понимания термина «синергия». Оба они апеллируют к греческому слову «синергос» - «совместно действующий». Трудно решить, какое из них более раннее, более фундаментальное.

Условно будем считать первым понимание синергии, введенное западногерманским профессором Г. Хакеном в 1969 г. (см. [1]). По Хакену смысл термина «синергия» состоял в том, что сложные нелинейные системы способны к самоорганизации и самосовершенствованию. В это понимание термина «синергия» Г. Хакен вкладывал два смысла: первый – это теория возникновения нового свойства у целого, состоящего из активно взаимодействующих объектов; второй – это подход, требующий для своей разработки сотрудничества специалистов разных отраслей. В течение нескольких десятков лет последователями Хакена написаны сотни статей, состоялись многочисленные научные встречи. Это направление связано с именами Нобелевского лауреата И.Пригожина , Г.Николиса, советских и российских ученых Н.Н.Моисеева,В.С.Степина,С.П.Капицы,С.П.Курдюмова ,Е.Н.Князевой,Д.С.Чернавского и других .

Некоторые исследователи (и сам Г.Хакен среди них) идут еще дальше и указывают, что впервые термин «синергия», или «синергизм» (от греческого synergeia), был введен более ста лет назад английским физиологом Шерингтоном в ходе исследования мышечных систем и управления ими со стороны спинного мозга . С тех пор в биологии синергия обозначает эффект взаимного дополнения разных биосистем или отдельных видов флоры и фауны. В широком же смысле этот эффект заключается в том, что результат деятельности объединенных в систему элементов превышает сумму результатов работы данных элементов, действующих разрозненно.

Это - второе понимание синергии опирается на то, что часто объединение частей в единое целое дает больший эффект, чем их механическая сумма. В этом случае говорят, что эффект синергии положителен.

Такое понимание синергии ничуть не менее важно, чем понимание синергии по Хакену.

Приведенное определение дает второму пониманию синергии лишь качественный характер. Это определение также опирается на то, что часто целое обладает большей реальностью, чем его части . Даже качественное понимание синергии позволяет увидеть фундаментальное значение этого понятия для экономики, более того, для всей цивилизации. В сущности, что-либо спроектированное, построенное, функционирующее без синергетического эффекта не несет на себе печати совершенства, наоборот, несет оттенок ущербности. Ведь в этом случае, использование, переработка ресурсов, и в частности, человеческого труда, происходит с частичной растратой их потенциалов, а надо бы с их преумножением! Отметим что человеческая цивилизация имеет, в сущности, один единственный ресурс- живой человеческий труд и его расходовать необходимо очень осмотрительно, добиваясь на каждом этапе необходимого синергетического эффекта.

Сама мысль о необходимости синергетического эффекта кажется тривиальной, но на самом деле она еще не проникла в массовое сознание экономистов и других специалистов, хотя именно такое понимание синергии проскальзывает во многих публикациях, даже в публичной печати.

Это второе понимание зародилось даже раньше, чем первое - в 50-х годах 20-го века в работах И.Ансоффа (H.I.Ansoff) по стратегическому планированию и стратегическому менеджменту. Среди наиболее известных зарубежных разработчиков синергизма можно выделить именно Ансоффа, предложившего фундаментальную концепцию, имеющую практическое значение. Определив экономический базис синергии как возможность того, что результат совместных действий нескольких бизнес-едиииц превысит итоговый показатель их самостоятельной деятельности, Ансофф в качестве определяющих факторов рассматривает как материальные, так и нематериальные активы в тесной связи со способностями компании. Он выделяет две формы синергизма: начальную (экономия на стадии образования предприятия) и операционную (экономия на стадии текущей деятельности), измерение которых связано с определенной комбинацией трех переменных: более высоком объеме денежной выручки от продаж; более низких операционных издержках и инвестиционных вложениях.

Второе понимание синергии связано также с такими именами как М. Портер (Michael Porter), Х. Итами (Xiroyoki Itami) и другими (см. [4]).

Нам представляется, что второе понимание синергии ближе к экономике, чем первое. Причем важно подчеркнуть, что синергетические эффекты возникают и их нужно и должно поддерживать не только на «высоких» уровнях, но и, так сказать, в повседневной жизни, на любом уровне управления.

(подробнее см. [4]). Именно такое понимание синергии используется в нашей работе для исследования синергетических эффектов в теории игр. При этом в работе некоторые понятия теории коопертивных игр рассматриваются с точки зрения синергетических эффектов участия игроков в этих играх. Кооперативные игры являются математической моделью, описывающей многообразные процессы, связанные с распределением денежных сумм между многими участниками согласно их положению и силе участия в этих процессах (обычно создания или зарабатывания этих сумм).

1 Кооперативные игры

1.2 Коалиции и функция игры.

Пусть G - какая-нибудь группа. Коалицией называется любое подмножество группы, в том числе пустое и вся группа. Если группа состоит из n членов, то всего возможных коалиций 2n . Коалиции создаются для какой-то совместной деятельности (например, для создания и работы фирмы, для постройки пруда в садовом товариществе и т.п.).

Но, конечно, в реальности не всякая коалиция образуется. Чтобы коалиция образовалась, должен быть некоторый общий интерес ее членов.

Коалиция S, по определению, может обеспечить себе выигрыш $\nu(S)$. Числа $\nu(S)$, называемые также полезностями, обычно определяются некоторыми внешними условиями. Мы будем считать, в основном, эти числа денежными суммами. Как этот выигрыш $\nu(S)$ распределяется внутри коалиции S мы рассматривать не будем (например, этот выигрыш может быть распределен поровну между членами коалиции).

Конечно, числа $\nu(S)$ не могут быть совершенно произвольными. Часто полагают, что $\nu(\emptyset) = 0$, т.е. коалиция без членов совершенно бессильна и не может обеспечить себе никакого выигрыша. Наверное, если $T \supset S$, то $\nu(T) \geq \nu(S)$. Поэтому на функцию $\nu(S)$ накладывают следующие ограничения:

а) $\nu(\emptyset) = 0$;

б) $\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$; для любых двух коалиций без общих членов.

Последнее свойство называется супераддитивностью (если бы в условии было равенство, то тогда это условие называлось бы аддитивностью - характерным свойством меры). Можно доказать по индукции, что это свойство выполняется в соответствующем виде для любого (конечного) числа дизъюнктных коалиций. Оно имеет простой смысл: при объединении двух коалиций без общих членов в одну, эта коалиция – объединение, конечно, сможет обеспечить себе не меньшую полезность, чем суммарная полезность двух коалиций-слагаемых. Мы видим, что уже здесь заложена возможность синергетического эффекта. Набор чисел $\nu(S)$ называется характеристической функцией игры. Этот набор и решает, в конечном счете, какие из коалиций оказываются жизненными и образуются, а какие

– нет. Для целей изучения коалиций кооперативную игру можно отождествить с ее характеристической функцией ν.

«Играют» в кооперативную игру так. Арбитр предлагает игрокам некоторый дележ – денежные суммы, или какие-то материальные ценности, или еще что-нибудь (точное определение дележа см. далее). В роли арбитра может выступить, например, совет директоров акционерного общества, назначающий размер дивидендов. Если игроки (например, акционеры) согласны, то дележ осуществляется, и партия игры считается законченной. Однако какая-нибудь коалиция может счесть предложенный дележ невыгодным для себя, и если она достаточно сильна, то она может заблокировать этот дележ, и он не осуществится, и тогда игрокам придется искать более подходящий дележ.

Выше указывалось, что при задании коалиционной структуры каждой коалиции должен быть предписан ее выигрыш. Каждый член группы образует одночленную коалицию – состоящую только из этого одного члена. Выигрыш, предписанный этой коалиции $\{i\}$ обозначают $\nu(\{i\})$. Можно сказать более точно: игрок i сам, своими собственными усилиями, без чьей либо помощи может обеспечить себе выигрыш $v(\{i\})$. Из супераддитивности вытекает, что $\nu(\mathrm{G}) \geq \sum_{i \in \mathrm{G}} \nu(\{i\})$. Если же это неравенство строгое, то игра называется существенной. Существенность означает, что членам группы предстоит разделить между собой по определенным правилам что-то, превышающее в сумме то, что может достаться каждому, так сказать автоматически, но для этого надо будет предпринять определенные усилия, например, образовать некоторые коалиции. Мы видим, что здесь также заложен синергетический эффект – группа в целом может обеспечить больший выигрыш, чем игроки поодиночке.

Определение 1. Синергией кооперативной игры называется величина $\mathrm{Cin} = \nu(\mathrm{G}) - \sum_{i \in \mathrm{G}} \nu(\{i\})$.

Коалиция S также называется существенной если $\nu(\mathrm{S}) > \sum_{i \in \mathrm{S}} \nu(\{i\})$.

Определение 2. Синергией коалиции S в кооперативной игры называется величина $\mathrm{Cin}(\mathrm{S}) = \nu(\mathrm{S}) - \sum_{i \in \mathrm{S}} \nu(\{i\})$.

По супераддитивности синергия коалиции не может превышать синергии всей игры.

Существенность коалиции означает, что в такую коалицию имеет смысл объединяться. Несущественность, наоборот, означает, что в процессе дележа каждому достанется ровно столько, сколько он и сам может себе обеспечить только своими собственными усилиями. Существенность коалиции также означает, что объединение в коалицию приносит ее членам синергетический эффект.

Далее, кооперативная игра называется игрой с постоянной суммой, если для любой коалиции S имеем $\nu(\mathrm{S}) + \nu(\mathrm{G} \setminus \mathrm{S}) = \nu(\mathrm{G})$. И, наконец, кооперативная игра называется простой, если для всякой коалиции S либо $\nu(\mathrm{S}) = 0$ либо $\nu(\mathrm{S}) = 1$. В простой кооперативной игре коалиция S называется выигрывающей если $\nu(\mathrm{S}) = 1$ и проигрывающей если $\nu(\mathrm{S}) = 0$. Изучение простых кооперативных игр полезно для изучения голосовательных процедур. Если для всякого члена коалиции $\nu(\{\mathrm{i}\}) = 0$, но сама коалиция выигрывающая, то синергетический эффект для такой коалиции весьма ярок, фактически коалиция приобретает новое качество по сравнению со своими членами. Вообще же синергетический эффект должен обязательно быть при умелой организации. С качественной точки зрения такой эффект должен возникать от взаимопомощи и взаимопроникновения коалиций.

1.2.Дележи и их блокировка коалициями.

Коалиции создаются для достижения их членами некоторых целей. Любой неотрицательный вектор полезностей $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_i)$ (например, денежных сумм, если числа $\nu(\mathrm{S})$ есть денежные суммы), такой что

1) $\sum_{i \in \mathrm{G}} \mathrm{x}_i = \nu(\mathrm{G})$ и
2) $\mathrm{x}_i \geq \nu(\{i\})$ для любого $i \in \mathrm{G}$,

называется дележом кооперативной игры. Множество всех дележей обозначается $\mathrm{D}(\nu)$. Таким образом, дележ - это такой набор полезностей, который приемлем для каждой одночленной коалиции, т.е. для каждого члена группы. Говоря по-другому, в дележе идет речь о распределении зарплат по всей группе, и для каждого назначаемая ему зарплата должна быть приемлемой. Но дележ должен быть приемлем и для любой коалиции, иначе она его заблокирует, и он не осуществится.

Это приводит к понятию доминирования.

Пусть X,Y - два дележа. Говорят, что дележ X доминирует дележ Y по коалиции S (обозначается $X \succ_S Y$) если

1) $\sum_{i \in \mathrm{S}} \mathrm{x}_i \leq \nu(\mathrm{S})$ и
2) $\mathrm{x}_i > \mathrm{y}_i$ для всех $i \in \mathrm{S}$.

Смысл первого условия: коалиции S в силах обеспечить дележ X, а смысл второго условия в том, что для членов коалиции S дележ X предпочтительнее дележа Y. Говорят также, что дележ Y блокируется коалицией S.

Говорят, что дележ X доминирует дележ Y (обозначается $X \succ Y$), если найдется коалиция, по которой X доминирует Y . При этом Y называется доминируемым дележом, если найдется дележ Z, который его доминирует. (Отношение доминирования довольно необычно - например, оно не транзитивно, т.е. из того, что $X \succ Y$ и $Y \succ Z$, в общем не следует, что $X \succ Z$.)

Кооперативная игра ν называется совместной, если существует хотя бы один недоминируемый дележ, и несовместной в противном случае. Таким образом, в несовместной игре любой дележ блокируется некоторой коалицией и потому неосуществим. Наоборот, в совместной кооперативной игре игроки могут придти к соглашению, устраивающему всех - например, согласиться на какой-нибудь недоминируемый дележ - никакая коалиция все равно не может его заблокировать. Само множество всех недоминируемых дележей называется ядром игры и обозначается $\mathrm{K}(\nu)$ Ясно, что $\mathrm{K}(\nu) \subset \mathrm{D}(\nu)$.

Ядро представляет собой множество приемлемых дележей в том смысле, что ни одна коалиция не имеет возможности заблокировать такой дележ и, тем самым, отвергнуть его. Пустота ядра имеет самые печальные последствия. При таком устройстве коалиционной структуры корпорация не может выработать стратегию своих действий из-за противоречивости интересов различных своих подразделений. Как указывает теория кооперативных игр, пустота ядра часто бывает следствием наличия слишком сильных отдельных коалиций – вывод состоит в том, что корпорация должна уметь «обуздывать» амбиции отдельных своих подразделений и их лидеров.

Во многих играх, однако, ядро пусто.

К сожалению, это не частный случай, а некоторое общее положение, как утверждает следующая теорема.

Теорема. Существенная кооперативная игра с постоянной суммой несовместна.

Доказательство теоремы (см., например, в [2]).

Эта теорема показывает, что для изучения совместных кооперативных игр из двух условий: существенности и постоянства суммы надо выбрать какое-то одно. Существенность является, несомненно, более значимым и интересным свойством, имеющим синергетический эффект. Но что же такое нарушение постоянства суммы? Такое нарушение влечет существование коалиции S, такой что $\nu(\mathrm{S}) + \nu(G \setminus S) \neq \nu(\mathrm{G})$. По супераддитивности, это значит, что $\nu(\mathrm{S}) + \nu(G \setminus S) < \nu(\mathrm{G})$, т.е. коалиции S и $\mathrm{G} \setminus \mathrm{S}$ по отдельности являются более слабыми, чем вместе (точнее, сумма их возможных достижений меньше, чем когда они объединятся). Таким образом, для таких коалиций при их объединении возникает синергетический эффект.

2 Вектор Шепли

Этот вектор дает численную оценку «силы» каждого члена группы. При этом учитывается, в какие коалиции данный член группы может входить и насколько он эти коалиции усиливает - это в точности учет «влиятельности» и «наличия связей» этого члена группы. Даже из этого небольшого комментария видно, какое большое практическое значение имеет это абстрактное понятие и при его умелом использовании. Персонал организации неразрывно связан с разнообразными механизмами: компьютерами, факсами, автомобилями, экскаваторами, бульдозерами, подъемниками и т.д. Это накладывает отпечаток на работу с таким персоналом, на управление им, на его оценку. Приходится учитывать квалификацию работников, их навыки работы с механизмами, их совместимость и настроенность на взаимодействие с другими работниками. Вполне возможно применение методов теории игр к оценке персонала организации (в частности, для распределения бригадного заработка между членами бригады, для выявления влиятельных членов организации, для формирования новых бригад и рабочих мест (коалиций на языке теории кооперативных игр), для научной организации труда и т.д. Эти методы пока еще не вошли в широкую практику и имеют явный теоретический оттенок. Тем не менее, они показывают новое направление работы с персоналом, это направление неизбежно будет далее развиваться и совершенствоваться вместе с совершенствованием самих организационных структур.

Вектор Шепли можно использовать не только для распределения заработка между работниками. Его можно использовать, например, для распределения годового вознаграждения между топ-менеджерами корпорации с учетом их должностей, влиятельности, возможностей «лоббирования» и т.д. Да так в реальности и происходит, только, конечно, без скрупулезного вычисления компонент вектора Шепли. Вектор Шепли можно использовать для распределения оборудования и вообще, основных фондов, между бригадами и подразделениями - командами. Ведь основная идея вектора Шепли- как усиливает бригаду-команду включение в нее того или иного работника, действует и в этом случае –в случае машин и механизмов. Даже распределение полномочий между подразделениями фирмы может использовать эту идею о дополнительном усилении! В книге [5] авторы высказали интересную и красивую идею об оценке нематериального актива с помощью вектора Шепли. Развитие этой идеи см. в работе [6]. Вектор Шепли вполне можно использовать для выявления лидеров-организаторов команд. Это ясно, по крайней мере, в теоретическом плане. Использование этого на практике затруднительно из-за трудностей вычисления компонент вектора Шепли и из-за не разработанности соответствующих методик. Еще одно направление использования вектора Шепли – для оценки устойчивости той или иной команды-бригады см. [7]

Вектор Шепли вводится аксиоматически следующим способом.

Значение вектора Шепли f, является единственной функцией, удовлетворяющей следующей системе аксиом:

Симметричность. Пусть π есть перестановка игроков, такая что $\pi(i)$ есть образ игрока i. Тогда значение Шепли игрока $\pi(i)$ во вновь полученной игре равно значению Шепли для игрока i в исходной игре: $f_{\pi(\nu)}[\pi(i)] = f_\nu(i)$. Т.е. значение вектора Шепли не зависит от нумерации игроков.

Линейность. Пусть игра g есть сумма двух игр ν и w. Тогда значения вектора Шепли в игре ν+w есть сумма значений вектора Шепли в играх ν и w : $f_g = f_\nu + f_w$. При этом игра g задается характеристической функцией, равной сумме характеристических функций игр ν и w (ведь область определения всех трех характеристических функций одна и та же – множество всех коалиций одной и той же группы игроков).

Эффективность или нормализация. Сумма значений Шепли для всех игроков равна выигрышу всей группы $\nu(G)$: $\sum_{i\in G} f(i) = \nu(G)$.

Вектор Шепли - это некоторый способ дележа суммарного выигрыша $\nu(G)$ всей группы такой, что каждый игрок i получает величину $f(i)$.

Компоненты вектора Шепли даются формулой:

$$(1)\quad f(i) = \sum_{i\in T\subset G} \left[\frac{(t-1)!\cdot(n-t)!}{n!}\right] [\nu(T) - \nu(T \setminus \{i\}]$$

Поясним смысл входящих в эту формулу величин. Здесь n - число членов рассматриваемой группы, t - число членов коалиции T, в которую входит рассматриваемый член i группы, $\nu(A)$ обозначает выигрыш, который может обеспечить себе (произвольная) коалиция A, следовательно, $\nu(T) - \nu(T \setminus \{i\})$ - это дополнительный выигрыш, который может обеспечить член i при вхождении его в коалицию $T \setminus \{i\}$ (тем самым она превращается в коалицию T), и, наконец, $f(i)$ и есть то самое количественное выражение силы члена i группы.

Формулу (1) можно переписать так:

$$f(i) = \sum_{i\in T\subset G} \gamma_{i(T)} [\nu(T) - \nu(T \setminus \{i\}],\ где\, \gamma_i(T) = \left[\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\right].$$

Нетрудно доказать, что $\sum_{i\in T\subset G} \gamma_i(T) = 1$ для каждого члена i группы. Из супераддитивности вытекает, что $\nu(T) - \nu(T \setminus \{i\} \geq \nu(\{i\})$. Из предыдущего и отсюда вытекает, что $f(i) \geq \nu(\{i\})$. Далее можно доказать, что $\sum_{i\in G} f(i) = \nu(G)$ следовательно, набор $\{f(i): i \in G\}$ есть дележ.

Определение 3. Дележ $\{f(i): i \in G\}$ называется дележом по Шепли.

Определение 4. Синергетическим эффектом участия игрока i в игре ν называется величина $\mathrm{Cin}(i) = f(i) - \nu(\{i\})$.

Однако весьма часто дележ по Шепли не лежит в ядре игры (например, если ядро игры пусто) и в таком случае этот дележ не будет реализован, поэтому дележ Шепли в общем является лишь некоторым ориентиром для игроков.

Пример 1. Три человека учредили небольшое предприятие. Первый внес $10000, Второй – $20000, Третий – $30000 и Четвертый –$40000. Какова сила каждого при избрании председателем общества учредителей, если для избрания нужно чтобы «за» проголосовали учредители, сумма взносов которых больше 50 %.

Для каждого участника этой игры надо перечислить все коалиции, которые с его участием выигрывающие, т.е. сумма взносов которых в сумме больше 50 %, а без участия этого члена коалиция перестает быть выигрывающей. Для такой коалиции вклад этого игрока (т.е. величина $\nu(T) - \nu(T \setminus \{i\})$ в формуле (1) выше) решающий- он равен 1. Дело упрощается тем, что данном случае не нужно знать характеристическую функцию игры ν - ее подсчет производится непосредственно в процессе вычислений компонент вектора Шепли, (называемого в данном случае более точно, вектором влиятельности Шепли-Шубика). Его компоненты, в сумме равные 1, обозначим также как компоненты вектора Шепли – f(i). Напомним, что n=4.

Для Первого таких коалиций только одна: {1,2,3}, так что f(1)=($\frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12}$). Для Второго таких коалиций три: {1,2,3}, {1,2,4},{2,4} и потому f(2)=2($\frac{2!1!}{4!}$)+($\frac{1!2!}{4!} = \frac{3}{12}$)... Для Третьего таких коалиций тоже три: {1,2,3}, {1,3,4},{3,4} и потому $\mathrm{f}(3) = \frac{3}{12}$. Для четвертого его компоненту вектора Шепли-Шубика можно найти, вычтя из 1 сумму первых трех компонент, так что $\mathrm{f}(4) = \frac{5}{12}$. Уже из этого несложного примера видно, сколь может разниться действительная сила акционера, учредителя от доли его акций, взноса. Действительно, Первый внес 1/10 всех средств, но значение компоненты вектора Шепли для него равно 1/12, т.е. меньше. Для Второго вклад равен 2/10, а компонента вектора Шепли равна 3/12. Для Третьего: $\frac{3}{12} < \frac{3}{10}$. Выиграл также Четвертый: $\frac{5}{12} > \frac{4}{10}$.

3 Глобальный и локальный векторы Шепли

Рассмотрим кооперативную игру собственников за обладание контрольным пакетом – только что была рассмотрена такая игра. Пусть вклады участников таковы: Первый -10, Второй -20, Третий – 30, Четвертый – 40, Пятый, Шестой – 1.

Если рассмотреть коалицию {1,2,3,4} как самостоятельную, то компоненты вектора Шепли в ней только что были подсчитаны. Они равны соответственно, 1/12, 3/12, 3/12, 5/12. Высчитаем теперь компоненту вектора Шепли Четвертого в игре шестерых участников. Перечислим все подходящие коалиции (с Четвертым такие коалиции имеют не менее 52, без него – менее 52):

t=2:{4,2}, {4,3};

t=3:{4,2,5},{4,2,6}, {4,3,5},{4,3,6},{4,1,2},{4,1,3},{4,2,3};

t=4:{4,2,5,6},{4,3,5,6},{4,1,2,5},{4,1,2,6},{4,1,3,5},{4,1,3,6},{4,2,3,5},{4,2,3,6};

t=5:{4,1,2,5,6},{4,1,3,5,6},{4,2,3,5,6}.

Следовательно, искомая компонента вектора Шепли равна

$$f_4 = \frac{2\cdot 1!\cdot 4!+5\cdot 2!\cdot 3!+5\cdot 3!\cdot 2!+3\cdot 4!\cdot 1!}{6!} = \frac{2\cdot 4!+10\cdot 3!+10\cdot 3!+3\cdot 4!}{6!} = \frac{240}{6!} = \frac{1}{3}.$$

Видим, что для Четвертого его компонента вектора Шепли в коалиции первых четырех игроков больше, чем во всей группе из шестерых участников: $\frac{5}{12} > \frac{1}{3}$.

Пример показывает, какими причудливыми могут быть кооперативные игры: ведь весьма часто игроки стремятся максимизировать не свой выигрыш, а увеличить, расширить свое влияние. Вот и в этом примере: согласится ли Четвертый, если встанет вопрос о расширении группы с четырех до шести членов?

4 Биматричные игры

Такие игры задаются биматрицей (A,B)=($a_{ij,}$j, $b_{ij,}$), которую можем обозначить также C. Игроков двое. Эти игры представляют собой математическую модель конфликтов двух игроков. В кооперативном варианте такой игры игроки могут сообща решить, какой ход им сделать. В игре с побочными платежами игроки могут перераспределять выигрыш по взаимному согласию. Это и упрощает и усложняет игру. Будем предполагать, что такие перераспределения не происходят.

Итак, игроки ищут совместную вероятностную стратегию P=($p_{ij,}$) на множестве элементов матрицы C. При этом средние выигрыши игроков равны соответственно $x_1(P)=\sum_{i,j} a_{ij}p_{ij}$, $x_2=\sum_{i,j} b_{ij}p_{ij}$. Теперь можно сформулировать цели игроков в игре: они хотят найти такую стратегию P , чтобы их выигрыши были как можно больше. Как можно догадаться, эти цели игроков не совпадают, но и не антагонистичны.

Такие игры хорошо изучены (см., например, [8]). Будем предполагать известными такие понятия, как доминирование стратегий, стратегии, оптимальные по Парето, максимальные выигрыши, переговорное множество, графическая иллюстрация всех этих понятий, так что мы остановимся на некоторых новых, именно, синергетических моментах.

Пусть ν_i, $i = 1,2$ - максиминные выигрыши игроков, Пар, Пег - соответственно, множество Парето и переговорное. Напомним, что Пег $= \{P \in$ Пар:$x_1(P) \geq \nu_1, x_2(P) \geq \nu_2\}$. Заметим также, что из определения стратегии оптимальной по Парето, вытекает, что обе проекции этого множества на горизонтальную и вертикальную ось взаимно-однозначны.

Определение 5. Скажем, что стратегия P имеет синергетический эффект, если $M_1(P) \geq \nu_1, M_2(P) \geq \nu_2$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Смысл этого определения понятен: используя эту стратегию, игроки (по крайней мере, один из них) могут получить больше, чем каждый из них поодиночке. Вырожденный случай состоит в том, что переговорное множество состоит из одной точки. В невырожденном случае любая стратегия из переговорного множества дает синергетический эффект, более того, есть стратегия, имеющая строгий положительный синергетический эффект (когда оба неравенства строгие).

Определение 6. Синергией биматричной игры называется величина Cin = max{$x_1(P)+x_2(P)$:P Пar} $-(\nu_1 + \nu_2)$.

Предложение . Величина Cin находится как решение задачи

$$(2)\; x_1 + x_2 \to \max,\quad (x_1, x_2) \in \Pi ar$$

Ясно, что эта задача Линейного Программирования имеет решение и искомая точка есть одна из угловых точек переговорного множества.

В заключение этого п. заметим, что если в биматричной кооперативной игре нет стратегии с положительным синергетическим эффектом, то такая игра неинтересна: игроки и так обеспечат себе нужный выигрыш и кооперация им не поможет.

5 Биматричные игры и вектор Шепли

Пусть P -какая-нибудь стратегия из переговорного множества и M - суммарный выигрыш игроков при использовании ими совместной стратегии P . Как им разделить этот выигрыш между собой, используя вектор Шепли? Вычисляя компоненты вектора Шепли, получим $f_1 = \frac{1}{2}\nu_1 + \frac{1}{2}(M - \nu_2) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2)$, аналогично, $f_2 = \frac{1}{2}\nu_2 + \frac{1}{2}(M - \nu_1) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1)$. Отметим, что $f_1 \geq \nu_1, f_2 \geq \nu_2$ ибо $M \geq \nu_1 + \nu_2$. Если последнее неравенство строгое, то синергетический эффект для обеих игроков строго положителен, что легко доказать.

В исследованиях биматричных игр в кооперативном варианте логический анализ поиска решения игры, т.е. стратегии игроков, с которой они оба согласны, заканчивается выводом, что такая стратегия должна лежать в переговорном множестве. Для дальнейшего поиска оптимальной стратегии игроков применяют так называемые арбитражные схемы. Известна , например, арбитражная схема Нэша (см, например, [9]). Предлагается следующая арбитражная схема:

В качестве решения биматричной игры предлагается стратегия, при которой синергетические эффекты для игроков (равны и) максимальны.

Имеем $\mathrm{Cin}(1) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1) - \nu_1 = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$, аналогично $\mathrm{Cin}(2) = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$. Таким образом, синергетические эффекты одинаковы для обеих игроков. Следовательно, все сводится к максимизации суммарного выигрыша, т.е. к задаче (2) из п.4.

Литература

1. *Хакен Г.,* Синергетика, М.:1980.
2. *Оуэн Г.*Теория игр.М.:Мир,1971.
3. *Карманов В.Г.,* Математическое программирование, М., «Наука», 1975.
4. *Гатауллин Т.М.,Малыхин В.И.* Синергия и ее проявления, М.:Центр «Транспорт», 2007.
5. *Козырев А.Н.,Макаров В.Л.*Оценка стоимости нематериальных активов и интеллектуальной собственности.-М.:РИЦ ГШ ВС РФ,2003.
6. *А.Н.Козырев*.Оценка интеллектуальной собственности:Функциональный подход и математические методы: Издательские решения,2016.-350 с.
7. *Т.М.Гатауллин ,А.В.Верещаков*.Определение ценности работника с использованием методов теории игр.Вестник транспорта.12/2004,с.39-42.

8. *Гатауллин Т.М.,Малыхин В.И*. Прибавочная стоимость по Марксу в теории фирмы//Проблемы развития рыночной экономики, 2005,№ 4,с. 14-16
9. *Писарева О. М., Малыхин В. И.,* Теория игр для подготовки бакалавров по направлению "Экономика",2014, 95 с.