

DOI:

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ, ПОСТРОЕННОЕ ПО МЕТОДУ НАКРЫТИЙ

Белинская Ю.С.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии наук, ФГБОУ высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (национальный исследовательский университет)
usbelka@mail.ru

Аннотация: Одной из важнейших задач теории управления современными крупномасштабными системами является терминальная задача. Она заключается в построении управления, обеспечивающее движение данной динамической системы из заданного начального в заданное конечное положение за конечное время, а также нахождение соответствующей траектории. Метод накрытий - относительно новый метод, разработанный для решения этих задач, который применим как к плоским, так и к неплоским системам. К достоинствам метода относят его применимость для широкого класса систем и возможность учета ограничений. Недостатком метода является то, что он позволяет находить только программное управление. В этой работе численно исследовано влияние параметрической неопределенности системы на построенное управление. Кроме того, показано, что для рассматриваемой системы возможно изменение закона управления на обратную связь по состоянию, что позволяет получить устойчивое движение системы вблизи построенной траектории. Результаты расчетов системы демонстрируют эффективность предложенного метода замены управления.

Ключевые слова: метод накрытий, программное управление, мобильный робот с дифференциальным приводом

Введение

С развитием вычислительного аппарата все большее распространение получают мобильные автономные транспортные средства [1 - 2], например, мобильные роботы с дифференциальным приводом [3]. Их достоинствами являются относительная простота математической модели и многообразие допустимых методов управления. Особенно актуально управление одним таким объектом или их группой в условиях наличия ограничений. Причем ограничения могут быть как статические (стены домов и коридоров), так и динамические (другие движущиеся объекты). Кроме того, могут быть ограничения математической модели, такие, как ограничения на скорость и ускорение объекта или на угловую скорость и угловое ускорение.

Для решения задачи управления для таких объектов используют, как правило, следующий подход [4 - 5]. Вначале строится допустимая траектория, удовлетворяющая ограничениям модели. Методы планирования траекторий [6 - 7] развиваются в последнее время бурными темпами. В самом простом случае можно выбрать множество опорных точек, после чего свести задачу планирования траектории к серии задач терминального управления. Можно методами интеллектуального планирования сначала построить опорную траекторию, после чего решать задачу следования вдоль построенной траектории [8]. Мы в этой работе будем действовать первым методом, причем задача выбора опорных точек выходит за рамки данной работы.

Для решения задачи терминального управления допустимо использование множества методов (см., например, [1, 6, 9]). Мы будем применять метод, основанный на понятии накрытия [10, 11]. В этом методе система дифференциальных уравнений расширяется добавлением так называемого g -замыкания, благодаря чему задача терминального управления сводится к решению двух связанных задач Коши. Программная траектория при этом получается склеиванием различных маневров, каждый из которых был найден также с помощью метода накрытий.

В случае, если рассматриваемая система удовлетворяет свойству плоскостности [12], использование метода накрытий упрощается. В работе [13] было показано, что в качестве g -замыкания системы достаточно использовать произвольное дифференциальное уравнение, порядок которого равен количеству граничных условий задачи.

Недостатком метода накрытий является то, что он позволяет построить только программное управление. В рамках данной работы исследуется влияние параметрической неопределенности системы, описывающей движение мобильного робота с дифференциальным приводом, на программное управление, построенное по методу накрытий. В конце работы для рассматриваемой системы предлагается метод, с помощью которого можно понизить ошибки следования по траектории.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-57-00011.

1 Метод накрытий

1.1 Понятие плоской системы

Рассмотрим динамическую систему

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in X \subseteq R^n, \quad u \in U \subseteq U^m,$$

где t — независимая переменная (время), $x = (x_1, \dots, x_n)$ — переменные состояния, $u = (u_1, \dots, u_m)$ — вход системы (управление), $\dot{x} \equiv dx/dt$, X и U — области их изменения, $f = (f_1, \dots, f_n)$ — гладкая, то есть бесконечно дифференцируемая, векторная функция.

Система (1) называется дифференциально плоской, если определены функции

$$(2) \quad y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \dots, y_m = h_m(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}),$$

количество которых равно размерности управления, таких, что все переменные состояния и управления выражаются через эти функции или их производные до некоторого конечного порядка:

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= X(t, y_1, \dots, y_1^{(k_1)}, y_2, \dots, y_m^{(k_m)}), \\ u &= U(t, y_1, \dots, y_1^{(k_1+1)}, y_2, \dots, y_m^{(k_m+1)}) \end{aligned}$$

а любой набор функций (2), их производных в силу системы (1) и функции t функционально независим. При этом набор (2) функций называют плоским выходом системы.

Плоские системы эквивалентны системам

$$(4) \quad y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $n_1 + \dots + n_m = n$.

1.2 Описание метода накрытий

Пусть для системы (1) поставлена задача терминального управления:

$$(5) \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f,$$

где t_0 — начальный момент времени, t_f — конечный момент времени.

Для решения задачи (4-5) применим метод, называемый методом накрытий [11]. Предположим, что мы нашли функции $U_i, \varphi_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, переменных

$$(6) \quad t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)},$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(А) Соотношения вида $p_j = \varphi_j, j = 1, \dots, n$ определяют накрытие из системы

$$(7) \quad \dot{x}_j = f_j(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(8) \quad u_i^{(k_i)} = U_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)}), \quad i = 1, \dots, m,$$

в систему вида

$$(9) \quad \dot{p} = P(t, p), \quad p \in R^n.$$

(В) Заданные конечные условия на функцию x однозначно определяют конечные условия на функцию p и наоборот, конечные условия на функцию p определяют конечные условия на функцию x .

(С) Из начальных условий на функцию p можно однозначно определить начальные условия для переменных

$$(10) \quad u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)}.$$

В случае выполнения условий (А), (В), (С) задача может быть решена следующим образом:

1) Из конечных условий (5) вычисляем конечные условия на функцию p ,

2) Решаем задачу Коши для системы (9) с начальными условиями в точке t_f в сторону уменьшения времени,

3) Из начальных условий на функцию p находим начальные условия для переменных (10), а именно

$$(11) \quad u_1(t_0), \dot{u}_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0).$$

4) Решаем задачу Коши для системы (7), (8) с начальными условиями (5), (11).

Найденное таким образом решение есть решение задачи (1), (5), так как построенная функция $x(t)$ удовлетворяет начальным условиям (5) по построению, а конечным условиям (5) из условия (В).

Систему вида (7)-(8), удовлетворяющую условиям (А), (В), (С) для некоторых функций φ , будем называть Γ -замыканием задачи терминального управления (1), (5). Как показано выше, Γ -замыкание позволяет решать задачу терминального управления.

В работе [13] было показано, что в качестве Γ -замыкания произвольной задачи терминального управления для плоской системы можно взять любое дифференциальное уравнение, порядок которого равен количеству граничных условий задачи, то есть $2n$. Этим объясняется удобство использования метода накрытий для решения задачи терминального управления для плоской системы.

2 Решение задачи терминального управления для динамической системы двухколесной тележки

2.1 Кинематическая модель мобильного робота с дифференциальным приводом

Для исследования управления, построенного по методу накрытий, будем использовать математическую модель мобильного робота с дифференциальным приводом [3]:

$$(12) \quad \dot{x} = v \cos \varphi, \quad \dot{y} = v \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = w,$$

где (x, y) , м — пространственные координаты центра колесной оси робота, φ — угол ориентации робота по отношению к оси Ox , v , м/с — линейная скорость робота, w , 1/с — угловая скорость робота. Состоянием системы являются переменные (x, y, φ) , а управлением системы — переменные (v, w) . При известном управлении (v, w) угловая скорость поворота левого и правого колеса может быть вычислена с помощью формул

$$(13) \quad \dot{\theta}_r = \frac{1}{r}(v + bw), \quad \dot{\theta}_l = \frac{1}{r}(v - bw),$$

где $\dot{\theta}_r$, 1/с — угловая скорость правого колеса, $\dot{\theta}_l$, 1/с — угловая скорость левого колеса, b , м — расстояние от левого (или правого) колеса до центра колесной оси, r , м — радиус колеса. Схематично модель (12) изображена на рис. 1.

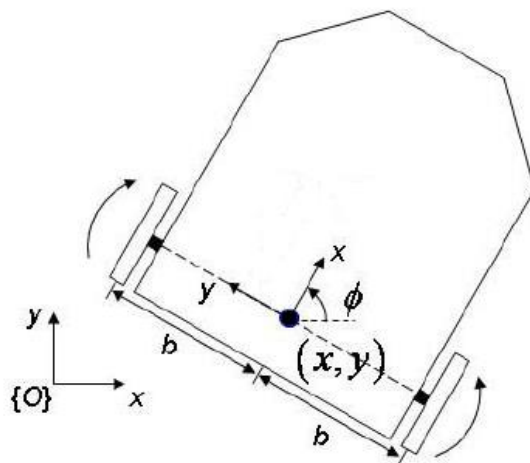


Рис. 1. Модель двухколесной тележки.

Система (12) является плоской с плоским выходом

$$(14) \quad y_1 = x, \quad y_2 = y.$$

В самом деле, переменные состояния и линейная скорость v могут быть выражены через функции плоского выхода и его производные до первого порядка включительно следующим образом:

$$(15) \quad x = y_1, \quad y = y_2, \quad \varphi = \arctg \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}, \quad v = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2},$$

а для w достаточно продифференцировать по времени выражение для v . Вводя дополнительную переменную

$$(16) \quad \xi = v = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2},$$

получаем расширенную систему

$$(17) \quad \dot{x} = \xi \cos \varphi, \quad \dot{y} = \xi \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{\xi}(v_1 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi), \quad \dot{\xi} = v_1 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi,$$

которая эквивалентна системе вида (4) второго порядка:

$$(18) \quad \ddot{y}_1 = v_1, \quad \ddot{y}_2 = v_2.$$

Заметим, что система (12) является плоской в области, где $v \neq 0$.

2.2 Решение задачи терминального управления для двухколесной тележки

Пусть для системы (17) поставлена задача терминального управления

$$(19) \quad x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \varphi(t_0) = \varphi_0, \xi(t_0) = \xi_0, x(t_f) = x_f, y(t_f) = y_f, \varphi(t_f) = \varphi_f, \xi(t_f) = \xi_f,$$

которую можно переформулировать в терминах плоского выхода следующим образом:

$$(20) \quad y_i(t_0) = y_{i0}, \dot{y}_i(t_0) = \dot{y}_{i0}, y_i(t_f) = y_{if}, \dot{y}_i(t_f) = \dot{y}_{if} \quad i = 1, 2.$$

Поскольку терминальная задача (18), (20) имеет 8 граничных условий, в качестве г-замыкания можно взять систему дифференциальных уравнений восьмого порядка. Будем искать решение задачи терминального уравнения среди решений системы дифференциальных уравнений

$$(21) \quad y_i^{(4)} = 0,$$

то есть в пространстве многочленов третьего порядка. Рассмотрим функции

$$(22) \quad p_i = y_i - \frac{1}{2}(t_f - t)^2 \ddot{y}_i - \frac{1}{3}(t_f - t)^3 \dddot{y}_i, \quad i = 1, 2.$$

Для любого решения y_1, y_2 уравнения (21) имеем

$$(23) \quad \dot{p}_i = \dot{y}_i + (t_f - t) \ddot{y}_i + \frac{1}{2}(t_f - t)^2 \dddot{y}_i, \quad i = 1, 2,$$

$$(24) \quad \ddot{p}_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому задачу терминального управления (18), (20) можно решить следующим образом.

- 1) Из конечных условий (20) вычисляем $p_i(t_f), \dot{p}_i(t_f), i = 1, 2$.
- 2) Находим решение задачи Коши для системы уравнений (24) с начальными условиями $p_i(t_f), \dot{p}_i(t_f), i = 1, 2$ в сторону уменьшения времени.
- 3) Зная функции $p_i(t), i = 1, 2$, находим $p_i(t_0), \dot{p}_i(t_0), i = 1, 2$.
- 4) Подставляя найденные значения в (22), (23), находим $\ddot{y}_i(t_0), \dddot{y}_i(t_0), i = 1, 2$.
- 5) Находим программную траекторию как решение задачи Коши для уравнения (21) с начальными условиями (20) и $\ddot{y}_i(t_0), \dddot{y}_i(t_0), i = 1, 2$. Программное управление при этом может быть получено как

$$(25) \quad v_i = \ddot{y}_i, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом можно получить решение задачи терминального управления в области, где скорость отлична от нуля.

2.3 Параметрическая неопределенность в модели мобильного робота

Эта работа посвящена исследованию влияния параметрической неопределенности математической модели на полученное программное управление. Параметрами системы являются:

- b — расстояние от левого (или правого) колеса до центра колесной оси,
- r — радиус колеса.

Хотя расширенная система (17) не зависит от этих параметров напрямую, действительными управлениями являются скорости левого и правого колес, а значит, погрешности в измерении параметров системы влияют на полученную траекторию системы. Для учета параметрической неопределенности на этапе интегрирования делаем следующее:

1) Находим из функций (25) программное управление в координатах (v, w) ,

2) С помощью соотношений (13) находим правую $\dot{\theta}_r$ и левую $\dot{\theta}_l$ скорость колеса, выражая ее через известные оценки параметров модели

3) Заменяя в полученных формулах оценки параметров модели на их действительные значения, выражаем управление системы в терминах $\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l$.

Сравнив полученную траекторию с программной, полученной по методу накрытий, можно оценить влияние параметрической неопределенности на траекторию системы.

3 Численные эксперименты

3.1 Оценка погрешности

Применяются различные методы оценки погрешности для решения задачи следования по траектории. Например, можно оценить максимальное отклонение от планируемой траектории (MAE – maximum absolute error), которое вычисляется по формуле

$$(26) \quad MAE = \|z(t_k) - z^*(t_k)\|, k = 0, \dots, N,$$

где t_k — разбиение отрезка $[t_0, t_f]$, причем $t_N = t_f$, $z = (x, y)^T$ — вектор пространственных координат, $z^*(t)$ — программная траектория, $\|z\|$ — евклидова норма вектора z .

Кроме того, в качестве ошибки можно использовать средне-квадратичную погрешность (RMSE – root mean square error), которая вычисляется по формуле

$$(27) \quad RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|z(t_k) - z^*(t_k)\|^2}.$$

Самый простой способ оценить погрешность — вычислить отклонение от планируемой траектории в конечной точке (EPAE – end point absolute error), то есть воспользоваться формулой

$$(28) \quad EPAE = \|z(t_N) - z^*(t_N)\|.$$

3.2 Результаты численных экспериментов

Пусть для системы (12) поставлена задача терминального управления

$$(29) \quad \begin{aligned} x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = 0, \quad \varphi(t_0) = 0, \\ x(t_f) = 7, \quad y(t_f) = 21, \quad \varphi(t_f) = \pi. \end{aligned}$$

С помощью метода накрытий была построена траектория, удовлетворяющая граничным условиям задачи.

Проведем серию численных экспериментов для следующих значений оценок параметров:

$$(30) \quad \tilde{r} = 0.1, \quad \tilde{b} = 0.2.$$

Реальные значения параметров будем варьировать и для каждого набора реального значения параметров рассчитаем максимальную абсолютную ошибку, средне-квадратичную ошибку и отклонение в конечной точке, рассчитываемые по формулам (26), (27), (28). Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Ошибки расчета траекторий для различных параметров.

Номер	R	B	MAE	RMSE	EPAE
1	0.1	0.2	5.1439e-05	3.2542e-05	4.7827e-05
2	0.101	0.2	0.2625	0.1764	0.2625
3	0.102	0.2	0.5239	0.3527	0.5239
4	0.103	0.2	0.7843	0.5288	0.7843
5	0.104	0.2	1.0438	0.7047	1.0438
6	0.105	0.2	1.3022	0.8804	1.3022
7	0.1	0.201	0.1270	0.0625	0.1270
8	0.1	0.202	0.2538	0.1246	0.2538
9	0.1	0.203	0.3802	0.1864	0.3802
10	0.1	0.204	0.5063	0.2479	0.5063

Номер	R	B	MAE	RMSE	EPAE
11	0.1	0.205	0.6321	0.3091	0.6321
12	0.1	0.21	1.2559	0.6102	1.2559
13	0.101	0.201	0.2138	0.1555	0.2068
14	0.101	0.202	0.2234	0.1585	0.2213
15	0.101	0.203	0.2954	0.1839	0.2954
16	0.101	0.204	0.3967	0.2239	0.3967
17	0.101	0.205	0.5090	0.2719	0.5090
18	0.102	0.205	0.5063	0.3376	0.5063
19	0.103	0.205	0.6372	0.4642	0.6244
20	0.104	0.205	0.8397	0.6150	0.8112

Из таблицы видно, что при увеличении отклонения от реального значения параметров ошибка увеличивается. Близость максимальной абсолютной ошибки к отклонению в конечной точке говорит о том, что ошибка имеет свойство накапливаться с увеличением времени, и даже небольшая неточность в определении параметров может привести к большому отклонению от планируемой траектории.

На рис.2 сплошной линией изображена реальная траектория, а штриховой – планируемая траектория при значении реальных параметров

$$(31) \quad r = 0.104, \quad b = 0.205.$$

Этот рисунок иллюстрирует приведенные в таблице выводы. Видно, что с увеличением времени увеличивается отклонение от планируемой траектории.

Эту проблему можно решить использованием обратной связи по состоянию. Заменяем программное управление, рассчитываемое по методу накрытий, на динамическую обратную связь для системы (17), рассчитываемую по формулам

$$(32) \quad v_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\dot{x} - \dot{x}^*) - \lambda_1 \lambda_2 (x - x^*), \quad v_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\dot{y} - \dot{y}^*) - \lambda_1 \lambda_2 (y - y^*),$$

где x^* , y^* - планируемые траектории, параметры $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

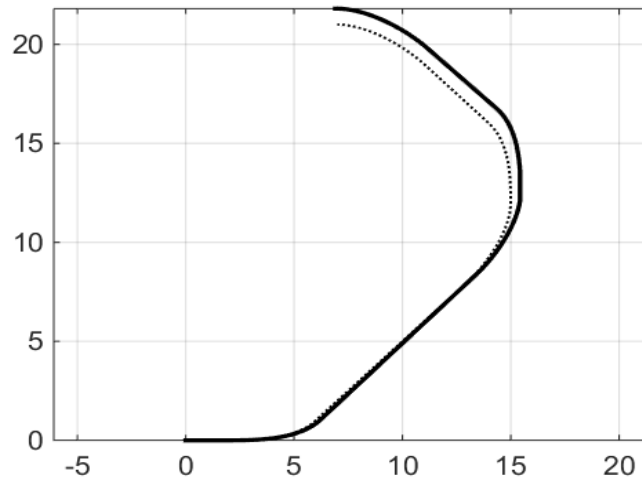


Рис. 2. График реальной и планируемой траектории.

Результаты расчета максимальной абсолютной ошибки приведены в таблице 2.

Таблица 2. Сравнение максимальной абсолютной ошибки для различных типов управления.

Номер	R	B	MAE, 1	MAE, 2
1	0.1	0.2	5.1439e-05	0.0506
2	0.101	0.2	0.2625	0.0435
3	0.102	0.2	0.5239	0.0378
4	0.103	0.2	0.7843	0.0341
5	0.104	0.2	1.0438	0.0331
6	0.105	0.2	1.3022	0.0348

Номер	R	B	MAE, 1	MAE, 2
7	0.1	0.201	0.1270	0.0507
8	0.1	0.202	0.2538	0.0508
9	0.1	0.203	0.3802	0.0509
10	0.1	0.204	0.5063	0.0509
11	0.1	0.205	0.6321	0.0510
12	0.1	0.21	1.2559	0.0514
13	0.101	0.201	0.2138	0.0436
14	0.101	0.202	0.2234	0.0437
15	0.101	0.203	0.2954	0.0438
16	0.101	0.204	0.3967	0.0439
17	0.101	0.205	0.5090	0.0440
18	0.102	0.205	0.5063	0.0383
19	0.103	0.205	0.6372	0.0347
20	0.104	0.205	0.8397	0.0336

В столбце MAE, 1 приведены для сравнения результаты абсолютной ошибки для программного управления, построенного по методу накрытий, в столбце MAE, 2 – результаты вычисления максимальной ошибки для синтезирующего управления, построенного по формулам (32). Видно, что замена управления приводит к уменьшению ошибки и эта ошибка перестает увеличиваться с увеличением отклонения параметров от их оценок. Тем не менее, в случае точного определения значений параметров максимальное отклонение от траектории превышает таковое при использовании программного управления, полученного по методу накрытий.

Заключение

В работе рассмотрена математическая модель двухколесной тележки. Исследовано влияние параметрической неопределенности модели на программное управление, построенное по методу накрытий. Вычислительные эксперименты показывают, что ошибка следования по траектории накапливается с увеличением времени. Для того, чтобы устранить эту ошибку, нужно использовать синтезирующее управление. В рамках данной работы для построения синтезирующего управления использован метод динамической обратной связи. Численные эксперименты показывают, что при использовании динамической обратной связи ошибка уменьшается.

Литература

1. *Cai G., Dias J., Seneviratne L.* A survey of small-scale unmanned aerial vehicles: Recent advances and future development trends // *Unmanned Systems*. 2014. Vol. 2 (2). Pp. 175-199.
2. *Das B., Subudhi B., Pati B. B.* Cooperative formation control of autonomous underwater vehicles: An overview // *International Journal of Automation and computing*. 2016. Vol. 13(3). Pp. 199-225.
3. *Tang C.P.* Differential Flatness-based Kinematic and Dynamic Control of a Differentially Driven Wheeled Mobile Robot // *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Biometrics*, December 19-23, 2009, Guilin, China. Pp. 2267-2272.
4. *Nieuwenhuisen M., Behnke S.* 3D planning and trajectory optimization for real-time generation of smooth MAV trajectories // *Mobile Robots (ECMR)*. 2015 European Conference on. IEEE2015. Pp. 1-7.
5. *Nieuwenhuisen M., Behnke S.* Local multiresolution trajectory optimization for micro aerial vehicles employing continuous curvature transitions // *Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2016 IEEE/RSJ International Conference on. IEEE. 2016. Pp. 3219-3224.
6. *Hu Q., Xie J., Wang C.* Dynamic path planning and trajectory tracking using MPC for satellite with collision avoidance // *ISA Transactions*. 2019. Vol. 84, Pp. 128-141.
7. *Patle B.K., Ganesh Babu L., Padley A., Parhi D.R.K., Jagadeesh A.* A review: On path planning strategies for navigation of mobile robot. 2019. Vol. 15, Is. 4. Pp. 582-606.
8. *Yakovlev K., Andreychuk A, Belinskaya J., Makarov D.* Combining Safe Interval Path Planning and Constrained Path Following Control: Preliminary Results // *Proceeding of the 4th International Conference on interactive collaborative robotics (ICR 2019)*, Istanbul, Turkey, August 20-25, 2019. Pp. 310-319.

9. *Yu S., Guo Y., Meng L., Qu T., Chen H.* MPC for Path Following Problems of Wheeled Mobile Robots // IFAC-PapersOnline, 2018. Vol. 51, Is. 20. Pp. 247-252.
10. Симметрии и законы сохранения математической физики, под. ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика // 2 изд., испр. и доп. М.: Факториал. 2005, 474 с.
11. *Белинская Ю.С., Четвериков В.Н.* Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, No. 12. С.1629-1635.
12. *Fliess M., Levine J. L., Martin Ph., Rouchon P.* Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples // International Journal of Control 61(6). 1995. P. 1327-1361.
13. *Belinskaya Yu. S., Chetverikov V. N.* Covering Method for Point-to-Point Control of Constrained Flat System // IFAC-Papers OnLine. 2015. Vol. 48, No. 11, P.924-929.