DOI:

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОСВОЕНИЯ ГАЗОВОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ

Скиба А.К.,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, г. Москва, ул. Вавилова 40
a.k.skiba@mail.ru,
Скиба Н.К.
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»,
Россия, г. Краснодар, ул. Московская 2
n_skiba@mail.ru

Аннотация: Строится непрерывная агрегированная динамическая модель добычи газа на газовомх месторождении. Обсуждается несколько вопросов, связанных с моделированием газодобычи. Рассмотрены два возможных режима разработки газовых месторождений при определенных условиях.
Первый режим затрагивает разработку одного газового месторождения с нулевым начальным фондом действующих скважин на двух последовательных временных этапах: при постоянном темпе бурения скважин и при отсутствии бурения. Второй режим касается поддержания постоянного уровня добычи газа за счет ввода новых скважин. Каждый режим исследуется. Делаются соответствующие выводы.
Ставятся и решаются оптимизационные задачи на максимум накопленной добычи и на максимум прибыли. Предлагаемые к исследованию задачи относятся к классу задач оптимального управления со свободным правым концом и фиксированным временем. Основным математическим аппаратом является принцип максимума Понтрягина.

Ключевые слова: динамическая модель газового месторождения, задача оптимального управления со свободным правым концом и фиксированным временем, максимизация прибыли, режимы разработок газового месторождения.

Введение

В последние десятилетия мировая экономика растет, потребляя всё больше и больше энергоресурсов. Несмотря на активную политику энергосбережения, общее потребление энергетических ресурсов на планете непрерывно растет и с начала XXI века увеличится по оценкам Министерства энергетики США к 2030 г. на 65%. Весомыми источниками спроса на энергию станут экономики развивающихся стран, на долю которых придется 40% всего прироста. В первую очередь это относится к таким странам, как Китай, Индия и государства Латинской Америки.

Все энергоресурсы подразделяются на два типа: традиционные и альтернативные (нетрадиционные). В то же время традиционные энергоресурсы также подразделяют на три основные группы:

- углеводородное сырьё, используемое на тепловых электростанциях (ТЭС);
- энергия падающей воды, используемая на гидроэлектростанциях (ГЭС);
- ядерное топливо, используемое на атомных электростанциях (АЭС).

К альтернативным ресурсам относят солнечную, ветровую, геотермальную энергию, энергию морских приливов, энергию воды и течений. Данные источники энергии возобновляются и не приносят существенного вреда окружающей среде и человеку. Доля традиционных энергоресурсов (нефть, газ и уголь) в совокупном потреблении первичных энергоносителей высока и сохраняется на уровне около 80%.

По мере роста энергопотребления всё больше стран ощущают недостаток в энергоресурсах из-за их дефицитности, а также в силу изменчивости конъюнктуры мировых энергорынков. На них возникает всё возрастающий спрос. Поэтому актуальными становятся страны, имеющие энергоресурсы и желающие поставлять их на мировой рынок. К их числу относится и Россия.

Россия обладает крупнейшими запасами энергоресурсов, полезных ископаемых и других природных богатств, включая обширную территорию, охватывающую несколько временных и климатических поясов.

Среди обширного перечня энергоресурсов особое место занимает природный газ [1]. По своим характеристикам природный газ относится к невосполнимым полезным ископаемым, находящийся в недрах Земли при высоком давлении и температуре. Природный газ в пласте содержится в газообразном состоянии в виде отдельных скоплений (газовых месторождений) на глубине от 250 метров до 10 километров.

Для вскрытия продуктивного пласта и извлечения из него голубого топлива используют скважины. Скважины стараются разместить с равномерной плотностью по всей территории, на которой расположено месторождение. Это делается с целью по возможности обеспечить равномерное падение пластового давления в процессе постепенного извлечения природного газа из залежи [1].

В состав природного газа входят большое количество полезных веществ, используемых в быту и в промышленности. К основным компонентам природного газа относится метан, содержание которого достигает 98% по объёму. Наряду с метаном в состав газа входят и более тяжелые углеводороды: этан, пропан, бутан и пентан.

Доля газа в общем энергобалансе России существенна и составляет более половины от всех энергоносителей. В России больше всего газа тратится на производство электроэнергии и тепла. Остальной газ распределяется между населением, предприятиями ТЭК, коммунально-бытовым сектором, металлургией и другими многочисленными, но более мелкими потребителями.

Экспорт природного газа составляет значительную часть экспорта России и является крупным источником поступлений в государственный бюджет. В настоящее время планируется расширить поставки газа за рубеж. Например, в прошлом года президентом России были поставлены вопросы о возможности использования ресурсов Иркутской области, Красноярского края и Ямала для поставок газа по западному маршруту. В декабре того же года было поручено Минэнерго РФ и "Газпрому" разработать проект газопровода через Монголию в Китай.

В отделе Методов проектирования развивающих систем ФИЦ ИУ РАН на протяжении многих лет велись работы по математическому моделированию разработок нефтяных и газовых месторождений [2-4]. Данные модели при различных их модификациях подвергались исследованию. На них ставились и решались интересные оптимизационные задачи. Кроме того динамические модели использовались для численных расчетов при решении практических задач.

Среди оптимизационных задач, поставленных на упрощенной модели, особый интерес представляют две задачи: задача максимизации накопленной добычи для группы газовых месторождений с ограничением на пропускную способность газопровода [5] и задача максимизации длины их общей "полки" [6]. Данные задачи принадлежат к классу задач оптимального управления со смешанными ограничениями. Основным математическим аппаратом является принцип максимума Понтрягина в форме К. Эрроу [7]. Опираясь на этот математический аппарат, была решена важная задача из теории оптимального экономического роста [8]. Интересны другие работы, связанные с добычей газа [9,10]. Перейдем к построению модели.

1 Построение и исследование модели освоения газового месторождения

Рассмотрим модель функционирования газового месторождения с взаимовлияющими скважинами [2-4]. Введем следующие обозначения:

t - время, будем считать, что мы наблюдаем газовое месторождение, начиная с момента $t = 0$;

$q(t)$ - средний дебит добывающих скважин в момент t;

q^0- начальный средний дебит добывающих скважин;

$n(t)$ - количество скважин, вводимых в строй в единицу времени (следует отметить, что n величина целочисленная, но для простоты исследования будем допускать для нее любые неотрицательные действительные значения, что можно сделать ввиду большого количества скважин, обычно бурящихся на месторождении);

$N(t)$ - фонд действующих скважин в момент t;

N^0 - начальный фонд имеющихся скважин;

$Q(t)$ - текущая добыча газа;

$V(t)$ - извлекаемый запас газа, оставшийся в месторождении в момент t;

V^0 - начальный извлекаемый запас газа;

δ - коэффициент дисконтирования;

c - продажная цена природного газа;

k - стоимость строительства одной скважины.

Между описанными выше переменными устанавливается взаимосвязь, которую запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1)\ \dot{V}(t) = -Q(t) = -q(t)N(t),$$

$$(2) \dot{q}(t) = -\frac{q^0}{V^0} q(t)N(t) = -\alpha q(t)N(t),$$

$$(3)\ \dot{N}(t) n(t)$$

при начальных условиях

$$(4) \qquad V^0 > 0,$$

$$(5) \qquad q^0 > 0,$$

$$(6)\ N^0 \geq 0.$$

Заметим, что параметр $\alpha = -q^0/v^0$, используемый в написании дифференциального уравнения (2), предназначен только для упрощения вида математических выражений.

Будем предполагать, что в любой момент t месторождение покрыто равномерной сеткой скважин. Управление динамическим процессом разработки месторождения осуществляется за счет ввода новых скважин $n(t)$. Кроме того, будем считать, что разбуривание скважины и её ввод в разработку месторождения происходят в один и тот же момент времени.

Для иллюстрации возможностей модели рассмотрим два режима разработок газового месторождения.

Режим 1. Опишем динамическое поведение модели (1)-(6) на двух временных периодах разработки газового месторождения: на периоде от 0 до t_1 (>0) темп разбуривания месторождения постоянен $n(t) = const$ и в дальнейшем при $t > t_1$ бурение новых скважин не производится, т.е. $n(t) \equiv 0$. В предположении $N^0 = 0$ получаем следующие функции:

$$(7) N(t) = \begin{cases} nt \text{ при } t \in [0, t_1], \\ nt_1 \text{ при } t > t_1; \end{cases}$$

$$(8) q(t) = \begin{cases} q^0 \exp\left[\frac{\alpha n t^2}{2}\right] \text{ при } t \in [0, t_1], \\ q(t_1) \exp[-N(t_1)(t - t_1)] \text{ при } t > t_1; \end{cases}$$

$$(9)\ Q(t) = \begin{cases} q^0 n t \exp\left[-\frac{\alpha n t^2}{2}\right] \text{ при } t \in [0, t_1], \\ q(t_1) N(t_1) \exp[-N(t_1)(t - t_1)] \text{ при } t > t_1; \end{cases}$$

$$(10)\ V(t) = \begin{cases} V^0 \exp\left[-\frac{\alpha n t^2}{2}\right] \text{ при } t \in [0, t_1], \\ V(t_1) \exp[-N(t_1)(t - t_1)] \text{ при } t > t_1. \end{cases}$$

Анализ функции (9) показывает, что на начальном этапе разбуривания месторождения добыча газа $Q(t)$ на месторождении возрастает. Это связано с тем, что прирост добычи за счёт ввода новых скважин $n(t)$ превышает естественный темп падения добычи, относящийся к извлечению запасов газа. Если t_1 имеет небольшое значение, то в момент t_1 (в момент прекращения ввода новых скважин) добыча $Q(t)$ достигает максимального значения. В этом случае на графике мы могли бы наблюдать характерный ярко выраженный излом. Далее добыча падает.

Если t_1 имеет большое значение, то прирост добычи газа за счёт ввода новых скважин будет постепенно уменьшаться, и в момент $t_{max} = \sqrt{1/\alpha n}$ он совпадёт с естественным темпом падения добычи. В этот момент текущая добычи достигает своего максимального значения $Q_{max} = \sqrt{\frac{q^0 n V^0}{e}}$. В дальнейшем добыча газа падает.

Такие характерные особенности поведения добычи газа наблюдались на практике при разбуривании газовых месторождений.

Режим 2. Необходимо в динамике определить объем действующего фонда скважин, обеспечивающий полное извлечение всего запаса газа при постоянном заранее заданном уровне его добычи $\overline{Q}$. Интерес в постоянном уровне добычи газа проявляется как со стороны промысловиков, так и со стороны потребителей газа. Промысловикам постоянный уровень добычи необходим для закупки и настройки промыслового и транспортного оборудования под обеспечение добычи газа требуемого уровня. Потребителям газа постоянный уровень добычи необходим при решении вопроса о стабильном объёме закупок газа.

Приведённые выше доводы делают интересными исследование данного режима разработки месторождения. Перейдём к формальному описанию и исследованию упомянутого режима. Объем действующего фонда скважин изменяется по следующему закону:

$$(11)\ N(t) = \frac{\overline{Q}}{q^0 - \alpha\overline{Q}t}.$$

Таким образом, функция (11) определена на полуинтервале $[0.t^*)$, где $t^* = \frac{V^0}{\overline{Q}}$. В конечный момент t^* происходит полное извлечение запасов газа из месторождения. В то же время $\lim_{t\to t^*} N(t) = \infty$. Следовательно, в этом случае сетка скважин уплотняется до бесконечности.

Такой режим невозможно полностью реализовать на практике. Однако он реализован частично. Этапу постоянной добычи газа предшествует этап нарастающей добычи (для небольших газовых месторождений этап нарастающей добычи может и отсутствовать). За этапом постоянной добычи следует этап падающей добычи. Проблема увеличения периода постоянной добычи особо актуальна в настоящее время, когда многие газовые месторождения исчерпывают свои извлекаемые запасы.

Перейдем к постановке и решению оптимизационных задач.

2 Постановка и решение оптимизационных задач с одним газовым месторождением

Задача 1. О максимизации накопленной добычи для одного газового месторождения

Для системы дифференциальных уравнений (1)-(3) с начальными условиями (4)-(6) и фиксированного интервала времени $[0, T]$ требуется найти кусочно-непрерывную функцию $\hat{n}(t)$, удовлетворяющую ограничениям

$$0 \le n(t) \le \overline{n}(t),$$

и соответствующую ей траекторию *(q(t), N(t))* которая доставляет максимальное значение функционалу

$$(12) \qquad \int_0^T Q\,(t)dt.$$

Правый конец оптимальной траектории *(q(t), N(t))* считается свободным. Функция $\overline{n}(t)$ в последнем двойном неравенстве является непрерывной кусочно-гладкой функцией.

Поставленная задача относится к задаче оптимального управления. Однако её можно решить без применения аппарата оптимального управления.

Воспользовавшись (1)-(3), перепишем (12)

$$\int_0^T Q\,(t)dt = V^0\left\{1 - \frac{q(T)}{q^0}\right\} = V^0\left\{1 - \exp[-\alpha(N^0T + \int_0^T\int_0^t n(\theta)d\theta dt)]\right\} =$$

$$V^0\left\{1 - \exp[-\alpha(N^0T + \int_0^T (T-t)n(t)dt)]\right\} \le V^0\left\{1 - \exp[-\alpha(N^0T + \int_0^T (T-t)\overline{n}(t)dt)]\right\}.$$

Как видно из последнего выражения, функционал (13) достигает максимума при $\hat{n}(t) = \overline{n}(t)$, т.е. при максимально возможном темпе бурения скважин.

Более интересной является следующая задача. В постановке этой задачи впервые используются параметры c, k и δ, описание которых дано в начале первого раздела настоящей статьи.

Задача 2. О максимизации прибыли для одного газовых месторождений

На фиксированном интервале времени $[0, T]$ требуется максимизировать функционал

$$(13) \qquad \int_0^T [cQ\,(t) - kn(t)]exp???[-??t]dt$$

при дифференциальных связях (1})-(3) с начальными условиями (4)-(6), со свободным правым концом и ограничениями на управление

$$(14) \qquad 0 \le n(t) \le \overline{n}.$$

Управление $n(t)$ относится к классу кусочно-непрерывных функций.

В описании прибыли (13) используется коэффициент дисконтирования δ, введенный с целью соизмеримости доходов и затрат в различные моменты времени в будущем.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Оптимальное управление в задаче максимизации прибыли существует и принимает один вид из двух возможных вариантов:

$$(15) \qquad \hat{n}(t) = \begin{cases} \overline{n} & \text{при } t \in [0, \hat{T}], \hat{T} \in (0, T) \\ 0 & \text{при } t \in (\hat{T}, T]; \end{cases}$$

$$(16) \qquad \tilde{n}(t) \equiv 0.$$

Доказательство. Рассматриваемая задача 2 является задачей оптимального управления со свободным правым концом. Существование оптимального управления следует, например, из теоремы, приведённой в монографии [11, § 4.2]. Заметим, что дифференциальные уравнения (1) и (2) взаимосвязаны, и фазовые переменные $q(t)$ и $V(t)$ имеют линейную зависимость при любом допустимом управлении, т.е. $q(t) = \alpha V(t)$. Поэтому при решении задачи достаточно ограничиться двумя фазовыми переменными $q(t)$ и $N(t)$.

Для решения задачи 2 будем использовать принцип максимума Понтрягина [12,13] для задачи со свободным правым концом. Выпишем гамильтониан, сопряженные уравнения и условия трансверсальности:

$$(17) \qquad H = cqN - kn - \psi\alpha\, qN + \varphi\, n,$$

$$(18) \qquad \dot{\psi} = \delta\psi - cN + \psi\alpha\, N,$$

$$(19) \qquad \dot{\varphi} = \delta\varphi - cq + \psi\alpha\, q,$$

$$(20) \qquad \psi(T) = \varphi(T) = 0.$$

Здесь для удобства исследования гамильтониан и сопряженные переменные представлены в модифицированной форме. Такую же модифицированную форму использовал К. Эрроу в своей работе [8].

Рассмотрим всевозможные начальные значения сопряженных переменных ψ и φ, которые могут удовлетворять условиям трансверсальности (20) или им вообще не удовлетворять.

Утверждение 1. Сопряженная переменная $\psi(t)$, соответствующая оптимальной траектории, неотрицательна. Пусть выполнено равенство $\psi(\hat{t}) = 0$ при $0 \le \hat{t} < T$, тогда $\psi(t) \equiv 0,\ \tilde{n}(t) \equiv 0,\ N^0 = 0$ и справедливо следующее неравенство:

$$(21) \qquad \frac{cq^0}{\delta}[1 - exp(-\delta T)] \le k.$$

Доказательство. Из сопряженного уравнения (18) видно, что при отрицательных значениях переменной $\psi(t)$ условия трансверсальности (20) не выполняются.

Переходим ко второй части утверждения 1.

Из предположения $\psi(\hat{t}) = 0$ при $0 \le \hat{t} < T$, условий трансверсальности (20) и сопряженного уравнения (18) вытекает, что $\psi(t) \equiv 0,\ \tilde{n}(t) \equiv 0, \tilde{N}(t) \equiv 0$ не только на временном интервале $[\hat{t}, T]$, но и на всем рассматриваемом периоде $[0, T]$. Значит, месторождение не разрабатывается и дебит скважины $q(t) \equiv q^0$ на всем рассматриваемом периоде $[0, T]$.

С учетом условий трансверсальности (20) проинтегрируем дифференциальное уравнение (19) от 0 до T при условиях: $\psi(t) \equiv 0$ и $q(t) \equiv q^0$. В результате получаем

$$(22) \qquad \varphi(t) = \frac{cq^0}{\delta}\{1 - exp[-\delta(T - t)]\}.$$

Из (22) видно, что $\varphi(t)$ убывающая функция. Поскольку оптимальное управление $\tilde{n}(t) \equiv 0$ и при этом управлении достигается максимум гамильтониана, то $\varphi(0) \le k$. Отсюда и из соотношения (22) следует выполнение неравенства (21). Утверждение 1 доказано.

Следствие. Пусть на оптимальной траектории выполнено неравенство

$$(23) \qquad \frac{cq^0}{??}[1 - exp(-??T)] > k,$$

Тогда N(T)>0.

Положительность N(T) вытекает из утверждения 1, дифференциального уравнения (3), начального условия (6) и ограничений на управление (14).

Утверждение 2. Пусть (q(t), N(t)) является оптимальной траекторией при дополнительном условии N(T), тогда:

- на полуинтервале $t \in [0.T)$ выполняется двойное неравенство $0 < \psi(t) < \frac{c}{\alpha}$ и $\psi(T)$=0;
- на полуинтервале $t \in [0.T)$ сопряженная переменная $\varphi(t)$ положительна и строго убывает и $\varphi(T) = 0$.

Доказательство. Умножаем обе части сопряженного уравнения (18) на q и после преобразований с учетом (2) получаем

$$(24) \qquad \frac{d}{dt}[\psi q] = \delta\psi q - cqN.$$

Умножим обе части дифференциального уравнения (24) на exp(−?? t) и после несложных преобразований проинтегрируем обе части полученного равенства от t до T. Учитывая условия трансверсальности (20), приходим к соотношению

$$(25) \qquad \psi(t)q(t)\exp(-\delta t) = c\int_t^T q(\theta)\,N(\theta)\exp(-\delta\theta)\,d\theta.$$

В силу положительности $q(t)$ и $N(T)$, непрерывности и неотрицательности $N(t)$ вытекает, что интеграл в правой части равенства (25) положителен. Отсюда положительна сопряженная переменная $\psi(t)$.

Принимая во внимание (2), преобразуем (24). В результате получаем следующее дифференциальное уравнение

$$(26) \qquad \frac{d}{dt}\left[\left(\psi - \frac{c}{\alpha}\right)q\exp(-\delta t)\right] = \frac{c\delta}{\alpha}q\exp(-\delta t).$$

С учетом условия трансверсальности (20) проинтегрируем обе части полученного соотношения (26) от t до T

$$(27) \qquad \left[\frac{c}{\alpha} - \psi(t)\right]q(t)\exp(-\delta t) = \frac{c}{\alpha}q(T)\exp(-\delta T) + \frac{c\delta}{\alpha}\int_t^T q(\theta)\exp(-\delta\theta)\,d\theta.$$

Правая часть равенства (27) положительна. Значит, $\psi(t) < \frac{c}{\alpha}$. Первая часть данного утверждения доказана. Переходим к доказательству последней части утверждения 2.

С сопряженным уравнением (19) проделаем те же операции, что и с уравнением (18). После всех преобразований решение сопряженного уравнения (19) представится в виде интегрального выражения

$$(28) \qquad \varphi(t) = \int_t^T [c - \alpha\psi(\theta)]q(\theta)\exp[-\delta(\theta - t)]\,d\theta.$$

Отсюда следует, что сопряженная переменная $\varphi(t)$ положительна на полуинтервале $t \in [0.T)$.

Умножаем обе части сопряженного уравнения (18) на q и после преобразований с учетом (2) получаем

$$(29) \qquad \frac{d}{dt}[\alpha\psi q - cq] = \delta\alpha\psi q.$$

Продифференцируем по t обе части сопряженного уравнения (18) и, подставив в полученное выражение (29), приходим к следующему дифференциальному уравнению второго порядка

$$(30) \qquad \ddot{\varphi} - \delta\dot{\varphi} = \alpha\delta\psi q.$$

Умножаем обе части дифференциального уравнения (30) на exp(−??t) и после преобразований с учетом (2), (19) и (20) проинтегрируем от t до T полученный результат

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(\mathrm{T})\exp[-\delta(\mathrm{T} - t)] - \delta\alpha\int_t^T \psi(\theta)q(\theta)\exp[-\delta(\theta - t)]\,d\theta =$$

$$-\mathrm{cq}(\mathrm{T})\exp[-\delta(\mathrm{T} - t)] - \delta\alpha\int_t^T \psi(\theta)q(\theta)\exp[-\delta(\theta - t)]\,d\theta.$$

Отсюда следует, что сопряженная переменная $\varphi(t)$ строго убывает. Утверждение 2 доказано.

Из максимизации гамильтониана (17), строгого убывания сопряженной переменной $\varphi(t)$, ограничений на управление (14), условий трансверсальности (20) и исходных данных вытекает справедливость одного из соотношений (15) или (16). Теорема 1 доказана.

Заключение

Настоящая работа посвящена анализу непрерывной агрегированной динамической модели разработок газовых месторождений с взаимовлияющими скважинами. На базе рассматриваемой модели аналитически исследуются два режима их разработок. В первом режиме исследуется в динамике поведение добычи газового месторождения при начальном нулевом фонде добывающих скважин и при положительном вводе новых скважин на первом этапе. Выявлены характерные особенности таких разработок.

Второй режим связан с попыткой как можно дольше удержать добычу газа на заранее заданном уровне. Оказывается, что такой период конечен и в конце периода количество задействованных в разработке скважин стремится к бесконечности, что практически невозможно.

Следующая часть работы посвящена решению двух оптимизационных задач. Одна задача относится к максимизации добычи, другая - к максимизации прибыли. Обе задачи являются задачами оптимального управления. Однако первую задачу можно решить без привлечения мощного математического аппарата, что и было сделано. Для решения второй задачи привлекли принцип максимума Понтрягина.

Литература

1. *Вяхирев Р.И., Коротаев Ю.П., Кабанов Н.И.* Теория и опыт добычи газа. – М.: Недра, 1998.
2. *Маргулов Р.Д., Хачатуров В.Р., Федосеев А.В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. – М.: Недра, 1992.
3. *Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Злотов А.В. и др.* Планирование и проектирование освоения нефтегазодобывающих регионов и месторождений: Математические модели, методы, применение. / Под ред. В.Р. Хачатурова. – М.: УРСС:ЛЕНАНД, 2015.
4. *Skiba A.K.* Dynamic model analysis of gas deposit developments. // 2018 Eleventh International Conference Management Of Large-Scale System Development (MLSD). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore Digital Library. – P. 619-622.
5. *Skiba A.K.* Maximization of the Accumulated Extraction in a Gas Fields Model. // In: Evtushenko Y., Jacimovic M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), Int. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA 2018) // Communications in Computer and Information Science, Springer. 2019. Vol. 974. – P. 453-469. DOI 10.1007/978-3-030-10934-9_32.
6. *Скиба А.К.* Поиск в модели газовых место рождений максимальной длины их общей "полки". // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 2(42). – С. 49-61.
7. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту// Матем. экономика. – М.: Мир, 1974. – С. 7-45.
8. *Skiba A.K.* Optimal Growth with a Convex-concave Production Function // Econometrica. – 1978. – V. 3(46). – P. 527-539.
9. *Соломатин А.Н., Скиба А.К., Хачатуров В.Р.* Моделирование разработки группы газовых месторождений с учетом их ликвидации. //Автоматика и телемеханика. 2018. № 11. – С. 16-31. DOI 10.31857/S000523100002774-5.
10. *Skiba A.K.* Prime Cost Analysis in the Model of Gas Fields // Optimization and applications (OPTIMA-2017): Proceedings of VIII International Conference on Optimization Methods and Applications "Optimization and Applications" (Montenegro, Petrovac, October 2017). – Moscow: Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, – 2016. – P. 524-530. http://ceur-ws.org/Vol-1987/paper75.pdf
11. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972.
12. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
13. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975.