DOI:

О НЕКОТОРОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СО МНОГИМИ КРИТЕРИЯМИ

Мохонько Е.З.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН,

Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д.40

mohon@ccas.ru

Аннотация: Рассматривается дифференциальная игра двух лиц со многими критериями. Если внутренность пересечения некоторых мостов не пуста, то существует гарантия по Слейтеру в позиционных стратегиях. Из непустоты пересечения также следует, что гарантия сохраняется при счетном числе моментов получения информации о порожденной траектории.

Ключевые слова: дифференциальная многокритериальная игра, гарантия по Слейтеру, режим получения информации, стабильный мост.

Введение

Данная работа посвящена поиску оптимального режима получения информации в многокритериальной дифференциальной игре. Многокритериальные динамические модели принятия решений на основе дискретной информации являются обычно более точным отображением реальности по сравнению с однокритериальными моделями, в которых используется непрерывно поступающая информация. Так что тема работы важна и актуальна.

Ряд математиков [1], [2] рассмотрел игровые модели, в которых дискретная информация, получаемая в специально подобранные моменты времени, оказывалась столь же эффективной, что и информация, получаемая непрерывным образом. Многокритериальные дифференциальные игры тоже уже рассматривались, например, в [3]. В данной работе соединены эти два направления.

Структуры различных оптимальных по Слейтеру стратегий здесь представлены с использованием стабильных мостов, а не дельта трубочки, как в [4].

Даны определения максимального, минимального и гарантированного решения по Слейтеру,

найдены достаточные условия существования гарантированного решения в позиционных стратегиях и построено это оптимальное решение. То же самое сделано и для r - стратегий, которые позволяют получать информацию как дискретным, так и непрерывным способами.

Во всех определениях оптимальных решений по Слейтеру присутствует требование единственности порождаемого стратегиями движения. В оптимальных r - стратегиях получение информации об этом движении дискретно.

Так достигается цель данной работы – найти дискретный режим получения информации о траектории, порождаемой гарантированным по Слейтеру решением в r - стратегиях.

1 Гарантированное решение в позиционных стратегиях

Рассмотрим многокритериальную задачу принятия решений при неопределенности

$$< \overline{U}, \overline{V}, (I^1(u,v) = g^1(x(T)), \dots, I^N(u,v) = g^N(x(T)) >,$$

$$(1)\ \dot{x} = f(x,t,u,v), t_0 \le t \le T,$$

$$(2)\ x(t_0) = x^0,$$

$$u \in P, v \in Q,$$

$$I^1(u,v) = g^1(x(T)), \dots, I^N(u,v) = g^N(x(T)).$$

Здесь x - n- мерный вектор состояния, u и v – p – и q- мерные вектор – функции. u - управление, значения которого выбирают лицом, принимающим решения (ЛПР), с целью сделать как можно **больше** N своих функций целей $\mathrm{I}^1(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \mathrm{g}^1(\mathrm{x}(\mathrm{T})), \dots, \mathrm{I}^\mathrm{N}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \mathrm{g}^\mathrm{N}(\mathrm{x}(\mathrm{T}))$, при том, что неопределенность (помеха) v может быть любой, $v \in Q$. $g^1(x(T)), \dots, g^N(x(T))$, непрерывны. N - количество компонент в вектор - функции цели.

Множества P и Q - компактны в соответствующих векторных пространствах. Вектор-функция *f(x,t,u,v)* непрерывна по всем своим аргументам и удовлетворяет ограничениям из [5]. Выполняется условие существования седловой точки в маленькой игре [5].

Множеством допустимых стратегий ЛПР и помехи $\overline{\mathrm{U}}, \overline{\mathrm{V}}$ является множество измеримых по всем своим аргументам позиционных *u(x,t), v(x,t)* и программных *u(t), v(t)* управлений, удовлетворяющих включению $u \in P, v \in Q$, а также r-стратегии $\overline{u}, \overline{v}$ [1], которые позволяют получать информацию о позиции как непрерывным, так и дискретным образом Используется формализм ломаных Эйлера [5] и модифицированных А.Ф.Кононенко движений [1].

Напоминание определения *r*-стратегий будет сделано в этой статье позже, когда надо будет найти гарантированное по Слейтеру решение в *r*-стратегях.

$X[t_*,x_*,u(x,t),v(x,t)]$ - множество движений, исходящих из t_*,x_*,если ЛПР применяет стратегию *u(x,t)*, а стратегия неопределенности описывается *v(x,t)*. $X[t_*,x_*,u(x,t)]$ - множество движений, исходящих из t_*,x_*,если ЛПР применяет стратегию *u(x,t)*. И мы не интересуемся, из каких соображений выбирает свое управление помеха. $X[t_*,x_*,u(x,t)] \supset X[t_*,x_*,u(x,t),v(x.t)] \forall v(x,t)$. Аналогично определяются пучки движений

$X[t_*,x_*,\overline{u}], X[t_*,x_*,\overline{v}], X[t_*,x_*,\overline{u},\overline{v}]$ при применении игроками r – стратегий $\overline{u}$ и $\overline{v}$.

Пусть $u^* \in \overline{U}$ - некоторая фиксированная стратегия из множества допустимых стратегий ЛПР. Пусть $v^* \in \overline{V}$ - некоторая фиксированная стратегия из множества допустимых стратегий помехи .

Следуя [6] многокритериальной задаче при неопределенности

$$(3) < \overline{U}, \overline{V}, (I^1(u,v) = g^1\big(x(T)\big), \dots, I^N(u,v) = g^N\big(x(T)\big) >$$

поставим в соответствии две многокритериальные задачи

$$(4) < \ \overline{V}, (I^1(u^*,v) = g^1\big(x(T)\big), \dots, I^N(u^*,v) = g^N\big(x(T)\big) > \text{и}$$

$$(5) < \overline{U}, (I^1(u,v^*) = g^1\big(x(T)\big), \dots, I^N(u,v^*) = g^N\big(x(T)\big) >$$

Для этих задач, опираясь на [6] ,[4], определим понятия векторных максимума и минимума.

Минимум по Слейтеру. Неопределенность $v^* \in \overline{V}$ называется *минимальной по Слейтеру* для задачи (4) в позиционных стратегиях, если выполнены два требования. Они такие:

Пара (u^*, v^S) порождает решение $x^0(t), t \in [t_0, T]$ задачи(1),(2), которое является и единственным движением,

несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1(u^*,v^S) > \underset{X[t,x^0(t),u]}{min} g^1\big(x(T)\big), \\ \quad \dots \\ I^N(u^*,v^S) > \underset{X[t,x^0(t),u]}{min} g^N\big(x(T)\big). \end{cases}$$

Максимум по Слейтеру. Альтернатива $u^* \in \overline{U}$ называется *максимальной по Слейтеру* для задачи (5) в позиционных стратегиях, если выполнены два требования. Они такие:

- Пара (u^S, v^*) порождает решение $x^0(t), t \in [t_0, T]$ задачи (1),(2), которое является и единственным движением,
- несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1(u^S,v^*) < \underset{X[t,x^0,v^*]}{max} g^1\big(x(T)\big), \\ \quad \dots \\ I^S(u^S,v^*) < \underset{X[t,x^0(t),v^*]}{max} g^1\big(x(T)\big). \end{cases}$$

Определение. Пару $[u^S, (I^{1,s}, \dots, I^{N,s})]$ назовем **гарантированным решением задачи** (3)в позиционных стратегиях, если выполнены следующие требования 1,2,3.

1. Пара (u^s, v^s) порождает решение $x^0(t), t \in [t_0, T]$ задачи (1),(2), которое является и единственным движением, то есть $\forall t \in [t_0, T]$ пучок движений состоит из единственного движения $X[t, x^0(t), u^s, v^s] = \{x^0(\tau), t \le \tau \le T\}$.

2. Существует неопределенность $v^s \in \overline{V}$ для которой $I^{1,s} = I^1(u^s, v^s), \dots, I^{N,s} = I^N(u^s, v^s)$ и альтернатива u^s является максимальной по Слейтеру в задаче

$$< \overline{U}, (I^1(u,v^s) = g^1\big(x(T)\big), \dots, I^N(u,v^s) = g^N\big(x(T)\big) >$$

3. Неопределенность v^S является минимумом по Слейтеру в задаче

$$< \overline{V}, (I^1(u^s,v) = g^1\big(x(T)\big), \dots, I^N(u^s,v) = g^N\big(x(T)\big) >.$$

Пусть $\exists i, \exists j, i \in 1, \dots, N, j \in 1, \dots, N,$ и $x^0(t), t \in [t_0, T]$ порождено кусочно-постоянными управлениями $u^0(t), v^0(t), x^0(t) \in \big(G_v^j \backslash \partial G_v^j\big) \cap \big(G_u^i \backslash \partial G_u^i\big), t \in [t_0, T]$. Здесь G_u^i - максимальный u-стабильный мост [5], к множеству $\{x, T | g^i\big(x(T)\big) \ge g^i\big(x^0(T)\big)\}, \partial G_u^i,$ - его граница, $u^{ext}(x,t)$ - экстремальная [5] стратегия к этому мосту.

G_v^j - максимальный v-стабильный мост к множеству $\{x,T|g^j(x(T)) \geq g^j(x^0(T))\}$,

∂G_v^j - его граница, $v^{ext}(x,t)$ - экстремальная стратегия к этому мосту.

$$v^0(x,t)=\begin{cases} v^0(t),(x,t)\in G_v^j,\\ v^{ext}(x,t),(x,t)\notin G_v^j,\end{cases}\quad u^0(x,t)=\begin{cases} u^0(t),(x,t)\in G_u^i,\\ u^{ext}(x,t),(x,t)\notin G_u^i.\end{cases}$$

Пара $[u^0(x,t),(I^1(u^0(x,t),v^0(x,t))=g^1(x^0(T)),\dots,I^N(u^0(x,t),v^0(x,t))=g^N(x^0(T))]$ является гарантированным решением задачи (3). Докажем это.

То, что пара $u^0(x,t),v^0(x,t)$ порождает решение $x^0(t)$, которое является и единственным движением, следует из вида функций $u^0(x,t),v^0(x,t)$ и включения $x^0(t)\in(G_v^j\backslash\partial G_v^j)\cap(G_u^i\backslash\partial G_u^i),t\in[t_0,T]$.

Альтернатива $u^0(x,t)$ является максимальной по Слейтеру в задаче

$$<\overline{U},(I^1(u,v^0(x,t))=g^1(x(T)),\dots,I^N(u,v^0(x,t))=g^N(x(T))>.$$

$\forall t\in[t_0,T]$ любое движение из пучка движений $X[t,x^0(t),v^0(x,t)]$ в момент T будет находиться во множестве $\{x,T|g^j(x(T))\leq g^j(x^0(T))\}$.Это следует из свойств моста G_v^j. Значит, несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1(u^0(x,t),v^0(x,t))<\max\limits_{X[t,x^0(t),v^0(x,t)]} g^1(x(T)),\\ \dots\\ I^l(u^0(x,t),v^0(x,t))<\max\limits_{X[t,x^0(t),v^0(x,t)]} g^l(x(T)),\\ \dots\\ I^N(u^0(x,t),v^0(x,t))<\max\limits_{X[t,x^0(t),v^0(x,t)]} g^N(x(T)).\end{cases}$$

Где $I^j(u^0(x,t),v^0(x,t))=g^j(x^0(T))$.

Неопределенность $v^0(x,t)$ является минимумом по Слейтеру в задаче

$$<\overline{V},(I^1(u^0(x,t),v)=g^1(x(T)),I^2(u^0(x,t),v)=g^2(x(T))>.$$

$\forall t\in[t_0,T]$ любое движение из пучка движений $X[t,x^0(t),v^0(x,t)]$ в момент T будет находиться во множестве $\{x,T|g^i(x(T))\leq g^i(x^0(T))\}$. Это следует из свойств моста G_u^i. Значит, несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1(u^0(x,t),v^0(x,t))<\min\limits_{X[t,x^0(t),v^0(x,t)]} g^1(x(T)),\\ \dots\\ I^l(u^0(x,t),v^0(x,t))<\min\limits_{X[t,x^0(t),v^0(x,t)]} g^l(x(T)),\\ \dots\\ I^N(u^0(x,t),v^0(x,t))<\min\limits_{X[t,x^0(t),v^0(x,t)]} g^N(x(T)).\end{cases}$$

Где $I^k(u^0(x,t),v^0(x,t))=g^k(x^0(T))$.

Таким образом, требования 1,2,3 выполнены и пара $[u^0(x,t),\left(I^1(u^0(x,t),v^0(x,t))=g^1(x^0(T)),\dots,I^N(u^0(x,t),v^0(x,t))=g^N(x^0(T))\right)]$ является гарантированным решением задачи (3) в позиционных стратегиях.

Теорема1.Пара $[u^0(x,t),\left(I^1(u^0(x,t),v^0(x,t))=g^1(x^0(T)),\dots,I^N(u^0(x,t),v^0(x,t))=g^N(x^0(T))\right)]$

является гарантированным решением задачи (3).

Теорема 2.

Достаточным условием существования гарантированного решения задачи (3) в позиционных стратегиях является требование $D_x^k\neq\emptyset$.

Здесь $D_x^k=(x(t))\in X[t_0,x^0,U^k,V^k]$

$$\exists i\in\{1,\dots,N\},\exists j\in\{1,\dots,N\},x(t)\in(G_u^i\backslash\partial G_u^i)\cap(G_v^j\backslash\partial G_v^j),\forall t\in[t_0,T]),$$

$U^k(V^k)$ - множество всех допустимых кусочно-постоянных управлений $u(t),v(t)$.

Пример.

$$\dot{x_1}=v,x_1(0)=0,\dot{x_2}=u,x_2(0)=\frac{3}{4},0\leq t\leq 1,0\leq u\leq 1,0\leq v\leq 1,$$

$$I^1(u,v)=g^1(x(1))=x_1(1)-\frac{1}{2}x_2(1),I^2(u,v)=g^2(x(1))=x_2(1)-\frac{1}{2}x_1(1).$$

ЛПР и помеха могут применять допустимые программные и позиционные управления.

Обозначим $\overline{A}=\{x_1,x_2,t|(0\le t\le 1)\wedge(0\le x_1\le 1)\wedge(\frac{3}{4}\le x_2\le 1\frac{3}{4})\}, x=(x_1,x_2)$,

$$G_v^1=\left\{(x,t)\in\overline{A}\,\middle|\,\min_{v(x,t)}\max_{X[t,x(t),v(x,t)]}g^1(x(1))\le g^1(x^0(1))\right\},$$

$$G_u^2=\left\{(x,t)\in\overline{A}\,\middle|\,\max_{u(x,t)}\min_{X[t,x(t),u(x,t)]}g^2(x(1))\ge g^2(x^0(1))\right\}.$$

Пусть $x_1^0(t)=t,\ v^0(t)=1, x_2^0(t)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t, u^0(t)=\frac{1}{4}, 0\le t\le 1.$

Тогда $g^1\big(x^0(1)\big)=\frac{1}{2}, g^2\big(x^0(1)\big)=\frac{1}{2}$.

$$\min_v \max_{X[t,x^0(t),v(x,t)]} g^1\big(x(1)\big)=t-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t\right)=\frac{7}{8}t-\frac{3}{8}<\frac{1}{2}\ , x^0(t)\in(G_v^1\backslash\partial G_v^1), 0\le t\ \le 1.$$

$$\max_u \min_{X[t,x^0(t),u(x,t)]} g^2\big(x(1)\big)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t+(1-t)-\frac{1}{2}t-\left(\frac{1}{2}\right)(1-t)=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}t>\frac{1}{2}\ , 0\le t\ \le 1.$$

$x^0(t)\in(G_u^2\backslash\partial G_u^2), 0\ \le t\ \le 1.$ Следовательно, $x^0(t)\in(G_v^1\backslash\partial G_v^1)\cap(G_u^2\backslash\partial G_u^2), 0\ \le t\ \le 1.$

$$v^0(x,t)=\begin{cases}1, & (x,t)\in\ G_v^1,\\ 0, & (x,t)\notin\ G_v^1,\end{cases}\ \dots\ u^0(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{4}, (x,t)\in G_u^2,\\ 1, (x,t)\notin G_u^2.\end{cases}$$

Пара $[u^0(x,t),(I^1\big(u^0(x,t),v^0(x,t)\big)=\ g^1\big(x^0(T)\big), I^2\left(u^0(x,t),v^0(x,t)=\ g^2\left(x^0(T)\right)\right)]$ является гарантированным решением задачи (3) в позиционных стратегиях.

2 Гарантированное решение в r - стратегиях

Определения оптимальных по Слейтеру решений в r-стратегиях аналогичны определениям оптимальных по Слейтеру решений в позиционных стратегиях. Построенное гарантированное

решение в r- стратегиях порождает траекторию, информацию о которой игроки получают не более, чем счетное число раз.

Определение гарантированного решения в r- стратегиях делается аналогично тому, как это было сделано для позиционных стратегий.

Найдем пару, которая является гарантированным решением задачи (3) в r- стратегиях и обеспечивает игрокам не более чем счетное число моментов получения информации об $x^0(t)$.

Напомним определение $r-$ стратегий [1].

Определение: $r-$стратегией $\overline{u}$ игрока 1 называется пара $\overline{u}=(r,u(.))$, ставящая в соответствие каждой точке$\big(x,t\big)$

1)неотрицательное число $r\ge 0$,

Если r>0, то измеримую функцию $u(\theta),\dots u(.)=\{u(\theta)=u(x,t;\theta)\in P\ |t\le\theta<t+r(x,t)\}$,

Если *r=0*, то управление в точке *(x,t) u(.)=u(x,t).*

Аналогично определяется $r-$стратегия $\overline{v}$ игрока 2.

В [1] определено понятие ломаной Эйлера $x_\Delta(t)=x_\Delta(t;\ x^*,t_*,\overline{u},v(.))$ и движения $x(t)=x(t;\ x^*,t_*,\overline{u})$, порожденных r- стратегией $\overline{u}$ из позиции (x^*,t_*) . В [1],[7] определено, какие моменты называется моментами получения информации для ломаных Эйлера и движений, порожденных r-стратегиями.

Обозначим

$X[x,t,u^0(\tau)](X[x,t,v^0(\tau)$ -множество движений, исходящих из точки x,t и порожденных кусочно-постоянной стратегией $u^0(\tau)\ \big(v^0(t)\big), \tau\in[t,T]$.

$$x^0(t)\in\big(G_v^j\backslash\partial G_v^j\big)\cap\big(G_u^i\backslash\partial G_u^i\big), t\ \in[t_0,T).$$

Рассмотрим позиционные стратегии $u^0(x,t), v^0(x,t)$ вида

$$u^0(x,t)=\begin{cases}u^0(t),(x,t)\in G_u^l,\\ u^{ext}(x,t),(x,t)\notin\ G_u^i,\end{cases}\qquad v^0(x,t)=\begin{cases}v^0(t),(x,t)\in\ G_v^j,\\ v^{ext}(x,t),(x,t)\notin G_v^j.\end{cases}$$

Здесь $u^{ext}(x,t)$ - стратегия, экстремальная к мосту $G_u^i, v^{ext}(x,t)$ - стратегия экстремальная к мосту G_v^j. Решение $x^0(t)\in \underline{D_x^k}$ порождено кусочно-постоянными управлениями $u^0(t), v^0(t)$.

$$\overline{T_u^i}(x,t)=\{\overline{t}|\overline{t}\in[t,T],\exists x\big(\tau;x,t,u^0(\tau)\big)\in X[x,t,u^0(\tau)],$$

$$\exists t_2 : x\big(\tau; x, t, u^0(\tau)\big) \notin G_u^i \forall \tau \in \big(\bar{t}, t_2\big), t_2 \in (\bar{t}, T]\}.$$

Если $\overline{T_u^i}(x,t)$ существует, то $\omega_{u0}^i(x,t) = \inf\limits_{\bar{t} \in T_u^i(x,t)} \bar{t}$ при $(x,t) \in G_u^i$

Если $\overline{T_u^i}(x,t)$не существует, тогда $\omega_{u0}^i(x,t) = T$.

$\omega_{u0}^i(x,t) = t$ при $(x,t) \notin G_u^i, \omega_{uc}^i(x,t) = \omega_{u0}^i(x,t) - t$.

$$\overline{T_v^j}(x,t) = \{\bar{t} | \bar{t} \in [t,T], \exists x\big(\tau; x, t, v^0(\tau)\big) \in X\big[x, t, v^0(\tau)\big),$$
$$\exists t_2 : x\,\big(\tau; x, t, v^0(\tau)\big) \notin G_v^j \forall \tau \in \big(\bar{t}, t_2\big), t_2 \in (\bar{t}, T]\}.$$

Если $\overline{T_v^j}(x,t)$ существует, то $\omega_{v0}^j(x,t) = \inf\limits_{\bar{t} \in T_v^j(x,t)} \bar{t}$ при $(x,t) \in G_v^j$.

Если $\overline{T_v^j}(x,t)$ не существует, тогда $\omega_{v0}^j(x,t) = T$. $\omega_{v0}^j(x,t) = t$ при $(x,t) \notin G_v^j$.

$$\omega_{vc}^j(x,t) = \omega_{v0}^j(x,t) - t.$$

Можно показать, что $[\overline{u^0}, \Big(I^1\left(\overline{u^0}, \overline{v^0}\right) = g^1\big(x^0(T)\big), \ldots, I^N\left(\overline{u^0}, \overline{v^0}\right) = g^N\big(x^0(T)\big)\Big)]$

является гарантированным решением задачи (3) в r - стратегиях.

$$\overline{u^0} = \begin{cases} r\,(x,t) = \omega_{uc}^i(x,t), (x,t) \in G_u^i, \ r(x,t) = 0, \ (x,t) \notin G_u^i, \\ \{u^0(\tau) | t \le \tau < t + r\}, r(x,t) > 0, (x,t) \in G_u^i, \\ u^0(t), \qquad (x,t) \in G_u^i, \qquad r = 0, \\ u^{ext}(x,t), \qquad (x,t) \notin G_u^i. \end{cases}$$

$$\overline{v^0} = \begin{cases} r\,(x,t) = \omega_{vc}^j(x,t), (x,t) \in G_v^j, \ r(x,t) = 0, \ (x,t) \notin G_v^j, \\ \{v^0(\tau) | t \le \tau < t + r\}, r(x,t) > 0, (x,t) \in G_v^j, \\ v^0(t), \qquad (x,t) \in G_v^j, \qquad r = 0, \\ v^{ext}(x,t), \qquad (x,t) \notin G_v^j. \end{cases}$$

Порождается та же траектория $x^0(t)$, которая порождалась позиционными стратегиями, образующие гарантированное по Слейтеру решение.

Методами работы [1] доказывается, что каждый игрок получает информацию об $x^0(t)$ не более, чем счетное число раз, так как в окрестности $x^0(t)$ $r(x,t) > 0$ и $r(x^0(t),t) > 0$.

Заключение

Достаточное условие существования гарантированного по Слейтеру решения в позиционных стратегиях и в r - стратегиях дается с применением конструкций стабильных мостов. Такой подход перспективный. Его можно применить и для изучения других принципов оптимальности в многокритериальных дифференциальных задачах. Например, для АА - гарантированного решения [6],стр.102.А также для нахождения оптимальных режимов получения информации в АА - гарантированном решении.

Литература

1. *Кононенко А.Ф., Мохонько Е.З.* О процессе получения информации в неантагонистических дифференциальных играх //Сообщения по прикладной математике. – М.:ВЦ АН СССР,1982, – 20с.
2. *Черноусько Ф.Л.,Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска.– М.: Наука,1978. –270с
3. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления.- Тбилиси: «Мецниереба»,1996. – 475с
4. *Кононенко А.Ф.* Структура оптимальной стратегии в динамических управляемых системах //Ж.вычисл. матем. и матем. физ.1980. 20,№5. – С.1105-1116.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.Н.* Позиционные дифференциальные игры.– М.: Наука, 1974. –
6. 456с.
7. *Жуковский В.И., Жуковская Л.В.* Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности.- М.: Издательство ЛКИ,2010.- 272с.
8. *Мохонько Е.З.*Дифференциальная неантагонистическая игра с дополнительным платежом. Сборник научных трудов XIII Международной школы – симпозиума «Анализ, моделирование, управление, развитие социально – экономических систем (АМУР-2019)»,14-27 сентября 2019г.

Сборник научных трудов. Симферополь-Судак. Симферополь: ИП Корниенко,2019. – С.289-295.