

DOI:

## МЕТОД ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ В ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЕМПФИРОВАНИЯ ВИБРАЦИЙ В КВАДРОКОПТЕРЕ<sup>1</sup>

Легович Ю.С., Максимов Ю.В., Максимов Д.Ю.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,*

*Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65*

*dmmax@inbox.ru*

*Аннотация: Предлагаемый доклад посвящен анализу работы демпфирующих элементов в квадрокоптере, амортизирующих вибрации двигателей и управляющего контроллера, защищаемого от вибраций. Целью анализа является определение степени подавления используемыми демпфирующими элементами вибраций, определение параметров демпфирующих элементов, при которых обеспечивается максимальное подавление вибраций в используемой конструкции реального исследуемого квадрокоптера.*

Ключевые слова: вибрации, демпфирование в квадрокоптерах, 3-х массовая модель квадрокоптера, метод электромеханических аналогий.

### Введение

Необходимость подавления вибраций в квадрокоптере объясняется различными причинами. Прежде всего, вибрации, воспринимаемые контроллером в виде шумов, ухудшают качество управления полетом (и его стабилизации), а, следовательно, и безопасность полета, особенно, в неблагоприятных погодных условиях, ухудшают качество работы целевого оборудования квадрокоптера. Кроме того, вибрации сокращают срок службы различных компонентов квадрокоптера. Радикальным средством борьбы с вибрациями является использование демпфирующих элементов [1]. Помимо этого, для ослабления влияния вибраций на работу контроллера могут быть использованы и программные средства фильтрации шумов.

При проектировании демпфирующих элементов для подавления вибраций в реальных механических системах необходимо учитывать параметры различных компонентов системы и их связи друг с другом. Влияние внутренних и внешних сил на работу отдельных элементов системы может быть исследовано путем моделирования.

При моделировании квадрокоптера используется представление динамической модели в виде системы с сосредоточенными параметрами [2, 3], которая с достаточной степенью точности отражает наиболее существенные факторы, определяющие ее поведение при заданных воздействиях. Построение математической модели исследуемого объекта основано на использовании законов механики, определяющих систему уравнений, описывающую поведение динамической модели. Законы механики, определяющие поведение объектов под действием различных сил, по форме оказываются аналогичными законам, описывающим поведение объектов исследования в акустике, электронике и др. областях науки, что дает возможность применять методы, разработанные в одной области, для решения задач в других областях. В данной работе при определении свойств рассматриваемой системы, обладающей несколькими степенями свободы, используется метод электромеханических аналогий. В соответствии с этим методом рассматриваемую механическую систему заменяют по определенным правилам некоторой эквивалентной электрической схемой и анализируют реакции полученной схемы на задаваемые воздействия, влияние значений параметров схемы на ее реакции.

Целью данного исследования является определение требований к параметрам амортизаторов, демпфирующих нежелательные колебания датчиков ускорений в используемой конструкции квадрокоптера. Решение такого рода проблемы в предлагаемой постановке, насколько известно авторам, ранее не рассматривалось, хотя исследованиям колебаний в квадрокоптерах уделяется большое внимание [4].

### 1 Описание динамической модели

При построении моделей с сосредоточенными параметрами исходят из того, что инерционные свойства механизма предполагаются сосредоточенными в отдельных точках в виде приведенных масс, и эти точки связаны между собой упругими, диссипативными и геометрическими безынерционными

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН №7(30) и соответствует области исследований, поддержанных грантами РФФИ 19-08-00261 и 16-08-00550

связями [2]. В нашем случае опоры двигателей и амортизаторы управляющего контроллера будут рассматриваться как безынерционные, **линейные**, упруго диссипативные элементы. В качестве модели амортизатора будем использовать модель Фойгта [5], часто применяемую для описания демпфирующих свойств вязкоупругих материалов, на основе которых (в основном) изготавливаются амортизирующие элементы квадрокоптеров. Упругие свойства указанных элементов характеризуются коэффициентом упругости  $k$ , диссипативные свойства - коэффициентом трения  $r$ . В модели Фойгта упругий и диссипативный элементы включены параллельно. Инерционные свойства двигателя и управляющего контроллера характеризуются соответственно эквивалентными массами  $M_e$  и  $M_c$ . Эквивалентная масса корпуса  $M_b$  в нашем случае соответствует массе квадрокоптера за исключением массы двигателей и контроллера. Ограничиваясь лишь исследованием свойств амортизирующих элементов, можно условно выделить в квадрокоптере части, каждая из которых содержит один двигатель и некоторые доли управляющего контроллера (с датчиками ускорений) и корпуса (с остальным оборудованием, жестко с ним связанным). На рис. 1 схематично представлена упрощенная 3-х массовая исследуемая часть рассматриваемой механической системы.

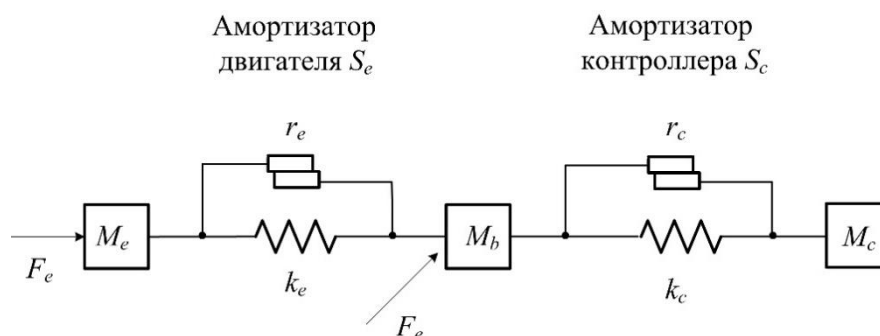


Рис. 1. Схематическое изображение 3-х массовой модели квадрокоптера

На рисунке приняты следующие обозначения элементов системы и их характеристик:

$F_e$  – результирующая сила помех работающего двигателя (силы дисбаланса, шумы подшипника и т.п.);

$M_e$  – эквивалентная масса двигателя;

$S_e$  – опора двигателя с коэффициентом упругости  $k_e$  и коэффициентом трения  $r_e$ ;

$F_b$  – результирующая внешней силы помех (ветер и т.п.), непосредственно воздействующей на часть корпуса квадрокоптера, относящуюся к одному двигателю;

$M_b$  – эквивалентная масса части корпуса, относящейся к одному двигателю;

$M_c$  – эквивалентная масса части контроллера, относящейся к одному двигателю;

$S_c$  – опора части контроллера, относящейся к одному двигателю, с коэффициентом упругости  $k_c$  и коэффициентом трения  $r_c$ .

## 2 Переход к эквивалентной электрической схеме

Метод электромеханических аналогий, используемый в данной работе, основан на прямой системе аналогий [6, 7]. Справочный материал по методу электромеханических аналогий приведен в Приложении.

В соответствии с используемой системой аналогий на рис. 2 представлен электрический аналог динамической модели, показанной на рис. 1.

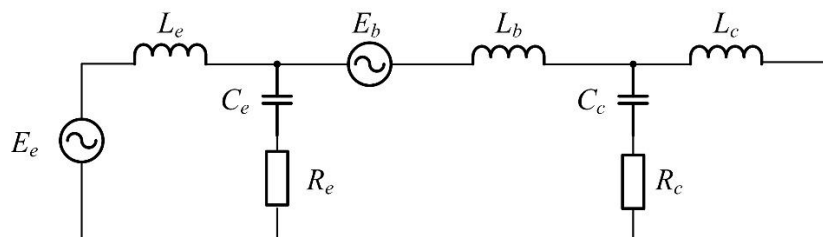


Рис. 2. Электрический аналог 3-х массовой модели квадрокоптера

На рисунке приняты следующие обозначения элементов схемы:

$C_e$  и  $C_c$  – конденсаторы – аналоги гибкости опор двигателя  $S_e$  и контроллера  $S_c$  соответственно;

$R_e$ , и  $R_c$  – резисторы, характеризующие потери в опорах двигателя и контроллера (соответственно) при их деформациях;

$E_e$  и  $E_b$  – источники напряжения – аналоги сил  $F_e$  и  $F_b$  соответственно;

$L_e$ ,  $L_b$  и  $L_c$  – катушки индуктивности – аналоги масс  $M_e$ ,  $M_b$  и  $M_c$  соответственно.

Если необходимо сравнить реакцию контроллера на воздействие колебаний двигателя при наличии демпфирующих элементов с реакцией в случае отсутствия демпфирования, то достаточно сравнить токи  $I_c$  и  $I_c^0$  для двух схем, соответствующих рассматриваемым вариантам, при одинаковом воздействии  $E_e=1$  (и, например при оценке влияния шумов двигателя,  $E_b=0$ ). Одна из схем представлена на рис. 2, вторая – на рис. 3.

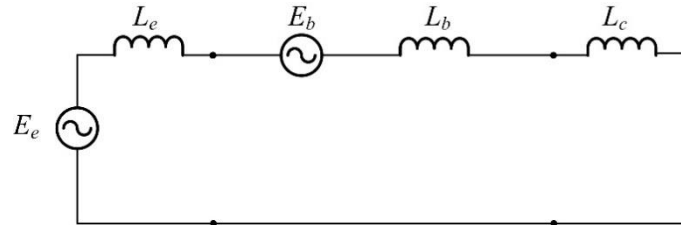


Рис. 3. Электрический аналог модели квадрокоптера без амортизаторов

Сравнение ускорений контроллера в рассматриваемых случаях сводится к сравнению производных по времени соответствующих токов.

Изменение параметров схемы приводит к изменению ее реакции на заданное воздействие, что позволяет при конструировании системы выбрать оптимальные значения характеристик амортизаторов отдельных узлов.

Использование эквивалентных электрических схем при гармоническом анализе рассматриваемой модели позволяет вывести выражение для тока  $I_c$  и его производной, что соответствует скорости колебания и ускорению контроллера. На рис. 4 представлена схема, эквивалентная схеме, показанной на рис. 2.

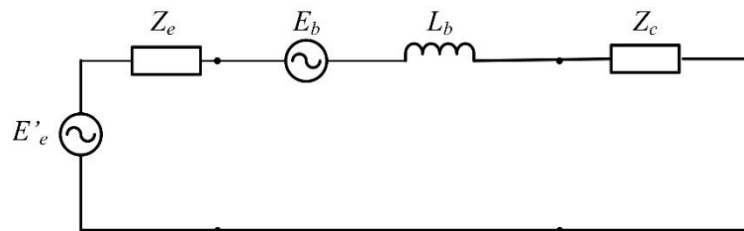


Рис. 4. Эквивалентный электрический аналог 3-х массовой модели квадрокоптера

На рисунке введены некоторые новые обозначения:

$E'_e = Re(E'_e) + j \times Im(E'_e)$  – эквивалентный комплексный источник напряжения, где

$$Re(E'_e) = E_e \times \frac{1 - (\omega/\omega_e)^2 \times [1 - (R_e/\rho_e)^2]}{d_e};$$

$$d_e = 1 - (\omega/\omega_e)^2 \times [2 - (R_e/\rho_e)^2] + (\omega/\omega_e)^4;$$

$$Im(E'_e) = -E_e \times \frac{(\omega/\omega_e)^3 \times R_e/\rho_e}{d_e};$$

$Z_e = Re(Z_e) + j \times Im(Z_e)$  – комплексное внутреннее сопротивление эквивалентного источника напряжения, где

$$Re(Z_e) = R_e \times \frac{(\omega/\omega_e)^4}{d_e}; Im(Z_e) = \frac{\omega/\omega_e \times \rho_e/R_e + (\omega/\omega_e)^3 \times (R_e/\rho_e - \rho_e/R_e)}{d_e};$$

$Z_c = Re(Z_c) + j \times Im(Z_c)$  – комплексное эквивалентное сопротивление параллельного соединения электрического аналога амортизатора контроллера с индуктивностью  $L_c$ , эквивалентной массе контроллера, где

$$Re(Z_c) = R_c \times \frac{(\omega/\omega_c)^4}{d_c}; d_c = 1 - (\omega/\omega_c)^2 \times \left[ 2 - \left( R_c/\rho_c \right)^2 \right] + (\omega/\omega_c)^4;$$

$$Im(Z_c) = \frac{\omega/\omega_c \times \rho_c/R_c + (\omega/\omega_c)^3 \times (R_c/\rho_c - \rho_c/R_c)}{d_c}.$$

В приведенных выражениях фигурируют следующие параметры аналогов амортизаторов и источника напряжения:

$\omega$  – круговая частота источника напряжения;

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{L_e \times C_e}}; \omega_c = \frac{1}{\sqrt{L_c \times C_c}}; \rho_e = \sqrt{\frac{L_e}{C_e}}; \rho_c = \sqrt{\frac{L_c}{C_c}}.$$

Из эквивалентных схем рисунке 4 и рисунке 3 выражения для токов  $I_c$  и  $I_c^0$  представляются в виде:

$$I_c = \frac{(E_e' + E_b) \times Z_c}{(Z_e + Z_c + j \times \omega \times L_b) \times j \times \omega \times L_c}; I_c^0 = \frac{(E_e + E_b)}{j \times \omega \times (L_e + L_b + L_c)}.$$

Отношение модулей этих токов характеризует степень подавления вибраций в частотной области, т.е. представляет собой амплитудно-частотную характеристику эквивалентного фильтра низких частот.

Исследование приведенных выражений удобнее проводить путем моделирования, которое в данной работе выполнено в среде LabVIEW. С целью демонстрации важности правильного выбора амортизаторов в каждом конкретном случае на рис. 5 показаны результаты расчетов амплитуды колебаний элементов модели (двигателя, корпуса и контроллера) в диапазоне частот при наличии совокупности амортизаторов относительно соответствующих значений для квадрокоптера без амортизаторов при воздействии единичной гармонической силы.

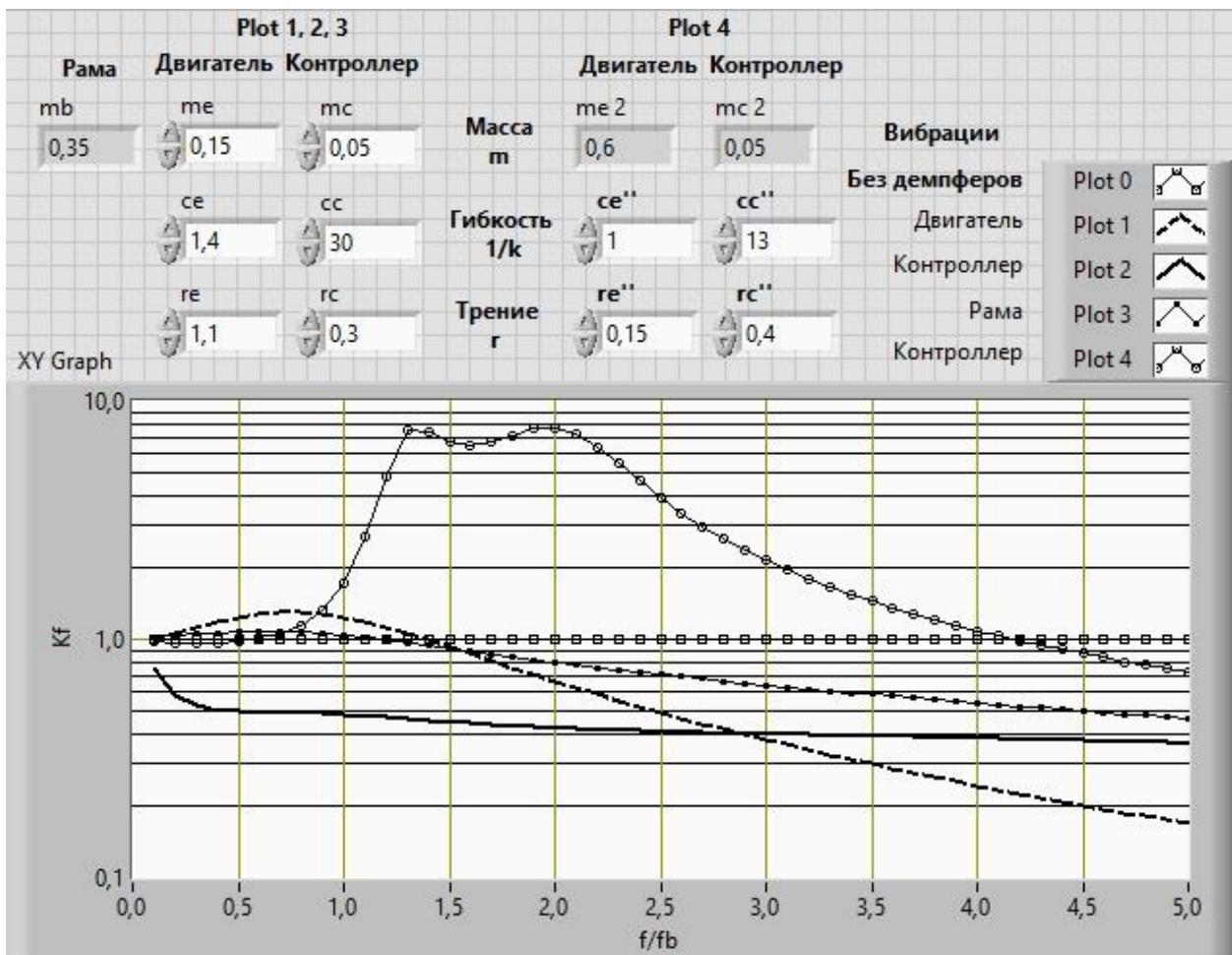


Рис. 5. Расчетные частотные характеристики модели

На рисунке использованы следующие обозначения:

- $m_b$ ,  $m_e$  ( $m_e/2$ ),  $m_c$  ( $m_c/2$ ) – доли масс рамы, двигателя и контроллера соответственно в общей массе квадрокоптера (для двух случаев, представленных кривыми Plot 1, Plot 2, Plot 3 – с одной стороны и Plot 4 – с другой);
- $c_e$  ( $c_e^{\parallel}$ ),  $c_c$  ( $c_c^{\parallel}$ ) – коэффициенты упругости амортизаторов двигателя и контроллера соответственно (для тех же двух случаев);
- $g_e$  ( $g_e^{\parallel}$ ),  $g_c$  ( $g_c^{\parallel}$ ) – коэффициенты вязкого трения амортизаторов двигателя и контроллера соответственно (для тех же двух случаев);
- $f/f_b$  - нормированная частота вибраций;  $f_b = 1$ ;
- $K_f$  – амплитуды колебаний двигателя, контроллера или корпуса относительно амплитуды колебаний квадрокоптера без амортизаторов;
- горизонтальная прямая на уровне  $K_f=1$  (Plot 0) соответствует амплитуде колебаний квадрокоптера, умноженной на  $(f/f_b)$ , при единичном воздействии на частоте  $f$  в случае отсутствия амортизаторов;
- кривые Plot 1, Plot 2 и Plot 3 отображают уровень вибраций двигателя, контроллера и корпуса соответственно относительно кривой Plot 0 при единичном воздействии на частоте  $f$  и использовании амортизаторов с параметрами, указанными на рисунке для этих кривых;
- кривая Plot 4 отображает уровень вибраций контроллера при использовании других амортизаторов, параметры которых указаны на рисунке для этой кривой. Этот пример наглядно демонстрирует важность правильного выбора амортизаторов.

Естественно, приведенными примерами не ограничивается все многообразие частотных характеристик фильтров низких частот, образуемых амортизаторами двигателя и контроллера, которые могут иметь место при различных значениях параметров амортизаторов.

## Заключение

Рассмотрение вопросов, связанных с анализом поведения различных узлов квадрокоптера (в рамках предложенной динамической модели) при воздействии на них внешних и внутренних сил, показывает, что такой анализ, во-первых необходим при проектировании амортизаторов и, во вторых, достаточно просто и наглядно может быть проведен с использованием метода электромеханических аналогий. Этот метод позволяет не только определить реакцию модели на предлагаемое воздействие, но и подобрать параметры элементов динамической модели таким образом, чтобы эта реакция стала оптимальной. Таким образом, представляется достаточно перспективным применение метода электромеханических аналогий для анализа динамических моделей квадрокоптера.

## Приложение

### Справочный материал по методу электромеханических аналогий (прямая система аналогий).

Метод электромеханических аналогий основан на формальном соответствии законов механики, описывающих поведение механических систем при действии механических сил, и законов в области электроники, определяющих реакцию электрических схем на действие сил электрических.

Так движение тела массой  $m$  под действием силы  $F(t)$  описывается уравнением  $F(t) = m \times \frac{dv}{dt}$ , где  $v$  – скорость тела. В то же время ток  $I_L$  через индуктивность  $L$  в электрической схеме связан с напряжением на индуктивности  $U_L(t)$  уравнением  $U_L(t) = L \times \frac{dI_L}{dt}$ .

Деформация  $x$  упругого тела под действием силы  $F$  определяется уравнением  $F = k \times x$ , где  $k$  – коэффициент упругости тела. А напряжение  $U_C$  и заряд  $Q_C$  на емкости  $C$  в электрической схеме связаны уравнением  $U_C = \frac{Q_C}{C}$ .

Скорость деформации  $v$  вязкоупругого тела под действием силы  $F$  определяется уравнением  $F = r \times v$ , где  $r$  – коэффициент вязкого трения. И ток  $I_R$  через активное сопротивление  $R$  в электрической схеме связан с напряжением  $U_R$  на нем уравнением  $U_R = R \times I_R$ .

Сопоставляя форму приведенных закономерностей механики и электроники, приходим к следующим аналогиям:

- Аналогами элементов трения ( $r$ ), упругости ( $k$ ) и массы ( $m$ ) механической системы являются соответственно элементы электрической схемы: сопротивление  $R$  (пропорционально  $r$ ), емкость  $C$  (обратно пропорциональна  $k$ ) и индуктивность  $L$  (пропорциональна  $m$ ).

- Аналогом силы, приложенной к некоторому («активному») элементу механической системы, является напряжение, приложенное в электрической схеме ко всей цепи элементов, присоединенной к аналогу «активного» элемента.
- Аналогом смещения точки в механической системе является изменение заряда в соответствующей точке электрической схемы.
- Аналогом скорости изменения смещения некоторой точки является ток, проходящий в электрической схеме через соответствующую точку.
- Аналогами последовательных (параллельных) соединений элементов трения и упругости механической системы (в любом сочетании) являются параллельные (последовательные) соединения соответствующих элементов электрической схемы.
- Аналогом последовательного или параллельного соединения элементов массы механической системы является последовательное соединение индуктивностей соответствующей электрической схемы.

На основании этих аналогий исследуемой механической системе можно сопоставить аналогичную электрическую схему, исследовать которую методами, разработанными в области схемотехники, в ряде случаев проще и нагляднее, чем исследовать механическую систему.

### Литература

1. *Sonnerlind H.* Теория и механизмы демпфирования в механике конструкций. – <https://www.comsol.ru/blogs/damping-in-structural-dynamics-theory-and-sources/>, дата обращения 01/02/2020.
2. *Вульфсон И.И.* Некоторые заметки об опыте изложения курса теории механических колебаний применительно к задачам динамики машин // Теория Механизмов и Машин. Т.3. 2005, №1, – С. 44-53.
3. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы, пер. с англ., – М: 1971.
4. *Попов Н.И., Емельянова О.В., Яцун С.А, Савин А.И.* Исследование колебаний квадрокоптера при внешних периодических воздействиях // Фундаментальные исследования. 2014, №1, – С. 28 – 32.
5. *Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.* Сопротивление материалов: Учебное пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – 560 с.
6. *Сапожков М.А.* Электроакустика. – М: Связь. 1978.
7. *Ольсон Г.* Динамические аналогии, пер. с англ., – М: 1947.