DOI:

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ИЗБЫТКЕ ИНФОРМАЦИИ

Горелов М.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва ул. Вавилова д.40

griefer@ccas.ru

Аннотация: Рассмотрены модели принятия решений при наличии неконтролируемых факторов. Предполагается, что у оперирующей стороны имеется доступ к большим объемам информации, характеризующей эти неконтролируемые факторы. Получены оценки объемов «полезной» информации. Рассмотрены три разных способа определения понятия «количество информации».

Ключевые слова: принятие решений в условиях неопределенности, количество информации, максимальный гарантированный результат.

Введение

В докладе будут рассмотрены несколько моделей операции, которую в немногих словах можно описать следующим образом. Оперирующей стороне нужно выбрать управление u из множества U. Эффективность управления помимо выбранного значения u зависит от состояния α окружающего мира. У оперирующей стороны имеется доступ к информации, которая более или менее полно характеризует состояние мира. И объем этой информации очень велик. При этом какие-то сведения весьма существенны для принятия решения, а какие-то не имеют к делу никакого отношения. Естественно возникает вопрос об отборе «нужной» информации. Понятно, что проблема носит фундаментальный характер. В современных реалиях можно представить много ситуаций, в которых для решения этого вопроса могут потребоваться средства искусственного интеллекта или еще какие-то сложные современные технологии. Браться за этот вопрос в полном объеме не станем. Ограничимся вопросом о том, насколько велик может быть объем полезной информации? Здесь удается получить совсем простые, и потому, видимо, важные оценки. О них и пойдет речь.

Чтобы совсем уж оживить картину, можно держать в голове следующую ситуацию. Оперирующей стороне предстоит выбрать тему доклада на конференции MLSD'2020. В первом приближении можно считать, что успех доклада зависит не только от его содержания, но и от того, что уже известно по этой теме. А такая информация разбросана по сети Интернет. В более сложном случае можно предполагать, что успех доклада зависит еще и от круга его слушателей. На момент выбора темы доклада этот круг еще не определен, но его можно как-то оценить по составу организационного комитета, по спискам участников предыдущих конференций MLSD и т.д. Собственно эти две ситуации и будут рассмотрены.

При моделировании такой операции возникает ряд проблем, которые стоит обсудить сразу же.

Анализируя описанную выше ситуацию, легко придти к выводу, что существует много осмысленных единиц информации, и только их совокупность более или менее полно характеризует сложившееся состояние мира. Для краткости будем называть эти единицы информации сообщениями. В качестве сообщений могут выступать тексты на естественных или искусственных языках, числовые таблицы, изображения, аудиозаписи и т.п. Таким образом, чтобы описать информированность оперирующей стороны, следует описать некоторое *множество* сообщений.

А по традиции, сложившейся в теории принятия решений [1–3], информированность лица, принимающего решения, обычно «кодируется» неким элементом заранее фиксированного множества. На самом деле, здесь нет противоречия, по крайней мере, если оставаться в парадигме канторовской теории множеств. Всегда можно мыслить множество сообщений как некоторое целостное «большое» сообщение. На самом деле этот теоретико-множественный прием имеет свой аналог и в «компьютерной» практике. Популярные программы-архиваторы как раз и преобразуют несколько файлов с информацией в один. Кстати говоря, отсюда довольно естественно «перебрасывается мостик» к теореме Колмогорова [4], о которой будет речь ниже.

Далее в разделах 1 и 2 используется более детальное описание в терминах множеств. В разделах 3–6, дабы избежать двусмысленностей и длиннот, считается что «факторизация» уже произведена.

Кстати говоря, детальное описание показывает, что такими способами может описываться и ситуация, при которой на этапе отбора полезной информации может происходить и ее «переработка». Например, если в докладе требуется привести информацию о физическом объеме выпущенного товара, но при этом в одном сообщении содержится информация о его стоимости, а в другом – о цене, то можно считать, что на этапе отбора деление производится и становится доступной информация о физическом объеме.

Вторая проблема возникает в связи с необходимостью измерения количества информации. Казалось бы, если рассматривать Интернет как источник информации, то вполне естественно измерять ее количество в битах или байтах. Такой подход используется разделах 1 и 2. Но есть и ряд тонкостей. С одной стороны, так измеренный объем информации существенным образом зависит от способа ее кодировки. Этот аспект далее обсуждать не будем, сославшись на теорему Колмогорова о существовании «почти оптимального» способа кодирования [4] и считая, что именно такой способ используется.

Другая тонкость проявляется, когда речь заходит об обработке действительно больших объемов информации. По сути, эта проблема была замечена еще в «доцифровую» эпоху [5], но в контексте обработки больших данных, почему-то не обсуждается. В отношении рассматриваемой операции эту проблему можно описать так. Пусть оперирующая сторона обрабатывает 314159265358979323 байт информации. Такая ситуация практически не отличается от ситуации, в которой обрабатывается 314159265358979324 или даже 314159265358989323 байт информации. По сути, здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда обычные натуральные числа не очень пригодны для измерения количества.

Нужно искать какие-то способы решения этой проблемы. Далее, в разделах 3–6, используется следующий подход, заимствованный из физики. Большое конечное множество заменяется континуумом. И числовые характеристики этого континуума используются для измерения количества информации. При этом существенно используется еще одно обстоятельство.

При огромных и все возрастающих объемах доступной информации наши знания об окружающем мире остаются весьма ограниченными. Действительно, за последние 10–20 лет объемы содержащейся в сети информации возросли на многие порядки. Сказать, что столь же бурный рост произошел, например, в математике, вряд ли можно. На самом деле, здесь нет особого парадокса. В том же Интернете можно найти многие тысячи изображений Спасской башни. Все они по-своему уникальны. Но в основном они несут примерно одну и ту же информацию.

Наличие многих «близких по смыслу» сообщений позволяет говорить о наличие некой топологии на множестве всех сообщений. А тогда достаточно естественно использовать для характеристики «величины» множества его топологическую размерность. Кстати говоря, представление об ограниченности наших знаний достаточно естественно моделируется как компактность соответствующего пространства.

Существует несколько альтернативных определений размерности. В данном докладе используется размерность Чеха–Лебега.

Исторически сложилось, что в теории принятия решений «массивность» множества характеризуется его размерностью. В теории информации традиционно используется близкий, но все же несколько иной подход. А именно, «массивность» множества характеризуется ε-энтропией, т.е. количеством элементов в его минимальной ε-сети (или какой-то близкой по смыслу величиной). Разумеется, если метрика заранее не фиксирована, то ε-энтропия не характеризует множества, поскольку всегда можно «поменять единицы измерения», умножив метрику на какое-то положительное число. Но вот скорость роста ε-энтропии при уменьшении ε вполне характеризует заданное множество. Таким образом, приходим к возможности использования размерности Минковского.

Но здесь появляются новые трудности. Для определения фрактальной размерности нужна не топология, а метрика, т.е. нужна количественная, а не качественная мера близости сообщений. Причем оцениваться по существу должна не синтаксическая, а семантическая близость. Здесь уже приходится достаточно далеко погружаться в теорию распознавания образов, теорию искусственного интеллекта и т.д. Это уже выходит за рамки данного доклада. В разделе 6 задача ставится чисто формально и находится ее приближенное решение. Забегая вперед, отметим, что семантика сообщений в найденном решении вполне понятна, так же как и смысл введенного расстояния.

Еще одна характерная черта задач принятия решений состоит в том, что оперирующая сторона чаще всего не только не имеет возможности выбирать все существенные параметры, но вдобавок в момент принятия решений не имеет полной информации о реализовавшихся значениях этих параметров. Такие постановки задач являются более общими, но требуют при решении уточнения некоторых чисто технических деталей. Поэтому в двух случаях частный случай полной информированности рассмотрен отдельно.

Таково, вкратце, содержание доклада. Доказательства полученных результатов не отличаются особой сложностью. Основное внимание стоит обратить на способы формализации содержательных представлений. Вероятно, они могут оказаться полезными и в других случаях.

1 Простейшая модель

Пусть оперирующая сторона выбирает управления u из множества U. В данном разделе будем считать множество U конечным. Пусть m – число его элементов.

Будем предполагать, что эффективность управления зависит не только от выбранного оперирующей стороной управления, но и от состояния окружающего мира α. Множество всех возможных состояний мира обозначим через A. В данном разделе множество A тоже считаем конечным.

О состоянии этого мира имеется большое количество информации, закодированной сообщениями s. Множество всех возможных сообщений будем обозначать буквой S. В простейшей модели будем считать, что все сообщения истинны. Таким образом, каждому $\alpha \in A$ соответствует множество $P(\alpha) \subset S$ истинных сообщений. Кроме того, в данной модели будем предполагать, что имеющаяся информация полна, то есть множество всех истинных сообщений однозначно определяет состояние мира. Формально это означает, что из условия $P(\alpha) = P(\beta)$ следует равенство $\alpha = \beta$. Пусть $\Sigma = \{T \subset S \mid \exists \alpha \in A\text{: } T = P(\alpha)\}$.

При сделанных предположениях можно считать, что цель оперирующей стороны состоит в том, чтобы максимизировать значение функции g, отображающей декартово произведение $U \times \Sigma$ в множество действительных чисел $\mathbf{R}$.

Если оперирующая сторона не имеет доступа к информации, то она с гарантией может рассчитывать на поучение выигрыша

$$\max_{u \in U} \min_{T \in \Sigma} g(u, T).$$

Если она не имеет ограничений по доступу к информации, то максимальный гарантированный результат составит

$$\min_{T \in \Sigma} \max_{u \in U} g(u, T).$$

Естественно возникает вопрос о том, а нельзя ли как-то агрегировать имеющуюся информацию с тем, чтобы получить тот же результат, не обращаясь к большому и плохо структурированному множеству Σ, а обрабатывая меньшие объемы информации. Формализуем этот вопрос следующим образом.

Пусть задано множество Q и отображение $\pi : \Sigma \to Q$. Обозначим через U_π множество всех функций u_π: $Q \to U$. Нас будет интересовать равенство

$$(1) \quad \max_{u_\pi \in U_\pi} \min_{T \in \Sigma} g\left(u_\pi\left(\pi(T)\right), T\right) = \min_{T \in \Sigma} \max_{u \in U} g(u, T).$$

Содержательный смысл конструкций в левой части формулы (1) таков. Оператор π преобразует всю имеющуюся информацию T о состоянии мира в некоторое сообщение $\pi(T)$ из нового множества Q (вообще говоря, функция π не предполагается инъективной). Получив сообщение $q \in Q$, оперирующая сторона вправе выбрать управление $u_\pi(q)$, т.е. стратегиями оперирующей стороны являются функции u_π из множества U_π. Как и ранее оперирующая сторона предполагается осторожной и максимизирующей свой гарантированный результат. Нас интересует вопрос о том, насколько большим должно быть число элементов множества Q, чтобы равенство (1) можно было выполнить, подобрав подходящее отображение π. В значительной степени на него отвечает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть число элементов множества Q больше или равно m. Тогда существует отображение $\pi : \Sigma \to Q$, для которого выполняется равенство (1).

Доказательство. Допустим $U = \{u_1,\ldots,u_m\}$, $Q = \{q_1,\ldots,q_n\}$ (по условию $n \geq m$).

Обозначим через U_* – множество всех функций u_*: $\Sigma \to U$. Тогда по известной теореме

$$(2) \quad \max_{u_* \in U_*} \min_{T \in \Sigma} g\left(u_*(T), T\right) = \min_{T \in \Sigma} \max_{u \in U} g(u, T).$$

Пусть u_* – функция, доставляющая максимум в левой части формулы (2). Определим отображение π условием: $\pi(T) = q_i$ тогда и только тогда, когда $u_*(T) = u_i$. Выберем стратегию $u_\pi \in U_\pi$ так, что $u_\pi(q_i) = u_i$ для $i = 1,\ldots,m$ (для $i > m$ значение $u_\pi(q_i)$ можно выбрать произвольно).

По построению, для любого $T \in \Sigma$ имеем $g(u_*(T),T) = g(u_\pi(\pi(T)),T)$. Следовательно,

$$\min_{T \in \Sigma} g\left(u_*(T), T\right) = \min_{T \in \Sigma} g\left(u_\pi\left(\pi(T)\right), T\right),$$

и, значит,

$$\max_{u_*\in U_*}\min_{T\in\Sigma} g\left(u_*\left(T\right),T\right)=\min_{T\in\Sigma} g\left(u_*\left(T\right),T\right)\le \max_{u_\pi\in U_\pi}\min_{T\in\Sigma} g\left(u_\pi\left(\pi\left(T\right)\right),T\right).$$

Обратное неравенство очевидно. Теорема доказана.

2 Модель с ограничениями на доступ к информации

В этом разделе рассмотрим более сложный, но и более интересный случай, когда не вся информация, существенная для управления системой доступна оперирующей стороне. Моделировать такую ситуацию можно следующим образом.

Сохраним обозначения предыдущего раздела. Но в данном разделе будем интерпретировать множество Σ как множество сообщений, доступных лицу, принимающему решения. «Смысл» этих сообщений по-прежнему задается отображением P. Поскольку теперь мы не предполагаем, что оперирующая сторона обладает всей информацией, будем считать, что цель управления состоит в увеличении значения функции g: $U\times A\to \mathbf{R}$, явно зависящей от состояния мира α.

Обозначим через $U_\#$ класс всех функций, отображающих множество Σ в множество U, и пусть

$$P^{-1}(T)=\{\alpha\in A{:}\ P(\alpha)=T\}.$$

В описанных условиях максимальный гарантированный результат оперирующей стороны равен

$$(3)\quad R=\max_{u_\#\in U_\#}\min_{\alpha\in A} g\left(u_\#\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right).$$

Стандартными рассуждениями показывается, что этот результат можно вычислять по формуле

$$R=\min_{T\in\Sigma}\max_{u\in U}\min_{\alpha\in P^{-1}(T)} g\left(u,\alpha\right).$$

Объем доступной оперирующей стороне информации может быть по-прежнему велик, поэтому вопрос о возможной степени ее агрегирования остается актуальным. Пусть, как и раньше, задано множество Q и отображение $\pi:\Sigma\to Q$, U_π множество всех функций u_π: $Q\to U$.

Если оперирующая сторона пользуется информацией, закодированной сообщениями из множества Q с помощью отображения π, то ее максимальный гарантированный результат равен

$$\max_{u_\pi\in U_\pi}\min_{\alpha\in A} g\left(u_\pi\left(\pi\left(P\left(\alpha\right)\right)\right),\alpha\right).$$

Аналогом теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть число элементов множества Q больше или равно m. Тогда существует отображение $\pi:\Sigma\to Q$, для которого выполняется равенство

$$\max_{u_\pi\in U_\pi}\min_{T\in\Sigma} g\left(u_\pi\left(\pi\left(P\left(\alpha\right)\right)\right),\alpha\right)=R.$$

Доказательство. Перенумеруем элементы множеств U и Q так, что $U=\{u_1,\dots,u_m\}$, $Q=\{q_1,\dots,q_n\}$. Пусть $u_\#$ – функция, доставляющая максимум в формуле (3). Пусть $\pi(T)=q_i$ тогда и только тогда, когда $u_\#(T)=u_i$. Этим корректно определено отображение π. Стратегию $u_\pi\in U_\pi$ определим так, что $u_\pi(q_i)=u_i$ для $i=1,\dots,m$, а в остальном произвольно.

Тогда для любого $\alpha\in A$ имеем $g(u_\#(P(\alpha)),\alpha)=g(u_\pi(\pi(P(\alpha))),\alpha)$, и потому

$$\min_{\alpha\in A} g\left(u_\#\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)=\min_{\alpha\in A} g\left(u_\pi\left(\pi\left(P\left(\alpha\right)\right)\right),\alpha\right),$$

значит,

$$R=\max_{u_\#\in U_\#}\min_{\alpha\in A} g\left(u_\#\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)=\min_{\alpha\in A} g\left(u_\#\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right)\le \max_{u_\pi\in U_\pi}\min_{\alpha\in A} g\left(u_\pi\left(\pi\left(P\left(\alpha\right)\right)\right),\alpha\right).$$

Обратно, для любой стратегии $u_\pi\in U_\pi$ условием $u_\#=u_\pi\circ\pi$ определена такая стратегия $u_\#\in U_\#$, что для любого $\alpha\in A$ выполняется равенство $g(u_\#(P(\alpha)),\alpha)=g(u_\pi(\pi(P(\alpha))),\alpha)$. Отсюда немедленно следует неравенство

$$R = \max_{u_\# \in U_\#} \min_{\alpha \in A} g\left(u_\#\left(P(\alpha)\right), \alpha\right) \geq \max_{u_\pi \in U_\pi} \min_{\alpha \in A} g\left(u_\pi\left(\pi\left(P(\alpha)\right)\right), \alpha\right).$$

Теорема доказана.

3 Простейшая топологическая модель

Обратимся к рассмотрению континуального случая. Вновь начнем с рассмотрения модели без ограничения на доступ к информации.

К сожалению, в топологической литературе существует терминологический разнобой. Далее используется терминология из [6]. Там же можно найти все необходимые определения и доказательства всех используемых фактов.

Будем считать, что оперирующая сторона выбирает управление $u \in U$ с целью максимизировать значение функции $g(u,\alpha)$, которая кроме выбранного управления u зависит еще и от неопределенного фактора α, про который известно, что $\alpha \in A$. Чтобы не вдаваться в детали, будем считать, что множества U и A наделены топологиями и компактны, а функция g непрерывна на $U \times A$.

Относительно пространства U сделаем еще одно предположение. Будем считать его вполне регулярным (тихоновским) и имеющим счетную базу. Пока не удается придумать пример ситуации, при моделировании которой данное предположение оказывалось бы ограничительным.

При сделанных предположениях максимум и минимум в формуле

$$R = \min_{\alpha \in A} \max_{u \in U} g(u, \alpha)$$

достигаются и величина R является максимальным гарантированным результатом оперирующей стороны (разумеется, в предположении, что оперирующая сторона имеет точную информацию о неопределенном факторе α).

Теперь рассмотрим схему управления, при которой информация о неопределенном факторе α с помощью отображения $\pi : A \to Q$ кодируется «сообщениями» из множества Q. Если при реализации значения неопределенного фактора $\alpha \in A$ оперирующая сторона получает сообщение $\pi(\alpha)$, то ее стратегиями можно считать функции u_π из класса U_π всех функций, отображающих множество Q в множество U. При наилучшем выборе такой стратегии она может рассчитывать на получение результата равного

$$(4)\quad \sup_{u_\pi \in U_\pi} \min_{\alpha \in A} g\left(u_\pi\left(\pi(\alpha)\right), \alpha\right).$$

Но «массивность» множества Q в данном случае будем определять иначе. Будем предполагать, что множество Q наделено топологией и вполне регулярно в этой топологии. Тогда корректно определена размерность Чеха–Лебега $\dim Q$ пространства Q. Ее и будем использовать в качестве меры объема передаваемой информации.

Тогда справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы 1.

Теорема 3. Существуют вполне регулярное топологическое пространство со счетной базой Q и отображение $\pi : A \to Q$, для которых выполняются условия $\dim Q \leq \dim U$ и

$$\max_{u_\pi \in U_\pi} \min_{\alpha \in A} g\left(u_\pi\left(\pi(\alpha)\right), \alpha\right) = R.$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$Q = \left\{u \in U : \max_{\alpha \in A} g(u, \alpha) \geq R\right\}.$$

Функция $\phi(u) = \max_{\alpha \in A} g(u, \alpha)$ непрерывна, следовательно, множество Q замкнуто. Введем на множестве Q топологию, индуцированную топологией пространства U. Тогда пространство Q будет вполне регулярным и будет справедливо неравенство $\dim Q \leq \dim U$.

Зададим отображение π следующим образом. В силу определения числа R для каждого $\alpha \in A$ выполняется неравенство

$$\max_{u \in U} g(u, \alpha) \geq R.$$

Следовательно, для каждого α существует $u \in U$, для которого $g(u,\alpha) \geq R$. Выберем любое такое u и положим $\pi(\alpha) = u$. Разумеется, тогда $\pi(\alpha) \in Q$. Тем самым отображение $\pi : A \to Q$ корректно определено.

Стратегию u_π: $Q \to U$ определим условием $u_\pi(q) = q$.

По построению для любого $\alpha \in A$ выполняется неравенство $g(u_\pi(\pi(\alpha)),\alpha) = g(\pi(\alpha),\alpha) \geq R$. Следовательно,

$$\min_{\alpha\in A} g\left(u_\pi\left(\pi\left(\alpha\right)\right),\alpha\right) \geq R,$$

и тем более

$$\max_{u_\pi\in U_\pi}\min_{\alpha\in A} g\left(u_\pi\left(\pi\left(\alpha\right)\right),\alpha\right) \geq R.$$

Поскольку обратное неравенство очевидно, теорема доказана.

4 Топологическая модель с ограничениями на доступ к информации

Топологический аналог дискретной модели из раздела 2 может быть построен следующим образом. Будем считать, что заданы вполне регулярное компактное топологическое пространство U со счетной базой, компактное топологическое пространство A и непрерывная функция g: $U \times A \to \mathbf{R}$.

Пусть кроме того задано топологическое пространство Σ и непрерывное отображение P: $A \to \Sigma$. Будем предполагать, что оперирующая сторона не может различать состояния окружающего мира α, для которых значения $P(\alpha)$ совпадают. В этом предположении можно считать, что стратегиями оперирующей стороны являются функции $u_\#$: $\Sigma \to U$. Обозначим множество всех таких функций через $U_\#$.

В рассматриваемой ситуации максимальный гарантированный результат оперирующей стороны может быть определен формулой

$$R = \sup_{u_\#\in U_\#}\inf_{\alpha\in A} g\left(u_\#\left(P\left(\alpha\right)\right),\alpha\right).$$

В силу непрерывности отображения P при любом $\sigma \in \Sigma$ множество $P^{-1}(\sigma) = \{\alpha \in A\text{: } P(\alpha) = \sigma\}$ компактно. Следовательно, при любых $\sigma \in \Sigma$ и $u \in U$ достигается минимум $\varphi\left(u,\sigma\right) = \min\limits_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g\left(u,\alpha\right)$.

При фиксированном σ функция $\varphi(u,\sigma)$ непрерывна по u. Поэтому достигается максимум $\psi\left(\sigma\right) = \max\limits_{u\in U}\max\limits_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g\left(u,\alpha\right)$.

Кроме того, точечно-множественное отображение P^{-1} является замкнутым, т.е. замкнут его график

$$\{(\alpha,\sigma) \in A \times \Sigma\text{: } \sigma = P(\alpha)\}.$$

Поэтому функция $\varphi(u,\sigma)$ полунепрерывна снизу по σ при любом фиксированном u, т.е. замкнут ее надграфик

$$\Delta(u)=\{(\sigma,t) \in \Sigma \times \mathbf{R}\text{: } t \geq \varphi(u,\sigma)\}.$$

Следовательно, замкнуто множество $\Delta_0 = \bigcap\limits_{u\in U}\Delta\left(u\right)$. Поэтому функция ψ является полунепрерывной снизу, поскольку множество Δ_0 – ее надграфик. А тогда достигается минимум

$$R' = \min_{\sigma\in\Sigma}\max_{u\in U}\min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g\left(u,\alpha\right).$$

Теперь уже стандартными рассуждениями устанавливается, что максимум в определении величины R достигается и $R = R'$.

Рассмотрим возможность дальнейшего агрегирования информации. Пусть задано вполне регулярное топологическое пространство со счетной базой Q и отображение π: $\Sigma \to Q$. Если получаемая оперирующей стороной информация кодируется сообщениями $\pi(P(\alpha))$, то можно считать, что множество ее стратегий U_π состоит из всех функций u_π: $Q \to U$. В таком случае ее максимальный гарантированный результат равен

$$\sup_{u_\pi \in U_\pi} \inf_{\alpha\in A} g\Big(u_\pi\Big(\pi\big(P(\alpha)\big)\Big),\alpha\Big).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Существуют вполне регулярное топологическое пространство со счетной базой Q и отображение $\pi : \Sigma \to Q$, для которых выполняются условия $\dim Q \le \dim U$ и

$$(5) \quad \max_{u_\pi \in U_\pi} \min_{\alpha\in A} g\Big(u_\pi\big(\pi(\alpha)\big),\alpha\Big) = R.$$

Доказательство. В качестве пространства Q рассмотрим множество U с заданной на нем топологией. Тогда доказательству подлежит только равенство (5) (все остальные утверждения теоремы выполняются по определению).

Определим отображение $\pi : \Sigma \to Q$ условием

$$\min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g\big(\pi(\sigma),\alpha\big) = \max_{q\in Q} \min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g\big(Q,\alpha\big)$$

для любого $\sigma \in \Sigma$. Пусть u_π – тождественное отображение из множества $Q = U$ в множество U. Тогда для любого $\sigma \in \Sigma$ и любого $\alpha \in P^{-1}(\sigma)$ будем иметь

$$g\Big(u_\pi\Big(\pi\big(P(\alpha)\big)\Big),\alpha\Big) \ge \min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g\Big(u_\pi\Big(\pi\big(P(\alpha)\big)\Big),\alpha\Big) = \min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g\Big(\pi\big(P(\alpha)\big),\alpha\Big) = \max_{u\in U} \min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g(u,\alpha).$$

В силу произвольности σ и α тогда

$$\inf_{\sigma\in\Sigma} \inf_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g\Big(u_\pi\Big(\pi\big(P(\alpha)\big)\Big),\alpha\Big) \ge \min_{\sigma\in\Sigma} \max_{u\in U} \min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g(u,\alpha),$$

или, что то же самое

$$\inf_{\alpha\in A} g\Big(u_\pi\Big(\pi\big(P(\alpha)\big)\Big),\alpha\Big) \ge \min_{\sigma\in\Sigma} \max_{u\in U} \min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g(u,\alpha).$$

Тем более

$$\sup_{u_\pi\in U_\pi} \inf_{\alpha\in A} g\Big(u_\pi\Big(\pi\big(P(\alpha)\big)\Big),\alpha\Big) \ge \min_{\sigma\in\Sigma} \max_{u\in U} \min_{\alpha\in P^{-1}(\sigma)} g(u,\alpha) = R' = R.$$

Обратное неравенство очевидно. Теорема доказана.

5 Альтернативные результаты

Остановимся на некоторых аналогах задачи, рассмотренной в разделе 3. Аналогичным образом может быть модифицирована и задача из раздела 4.

В разделе 3 обсуждается поиск топологического пространства Q и *произвольного* отображения $\pi : A \to Q$, для которых эффективность управления высока, а «объем» обрабатываемой информации невелик. Но пространство A, так же как множество Q предполагается наделенным топологией. Поэтому можно ставить вопрос о поиске топологического пространства Q и *непрерывного* отображения $\pi : A \to Q$, обладающих теми же хорошими свойствами. Такая задача, по существу, была решена в [7]. Интерпретация там рассматривается иная, но сути дела это не меняет.

Качественный вывод, полученный в разделе 3 для задачи с непрерывным отображением π не верен: размерность «оптимального» пространства Q в этом случае зависит не только от размерности пространства U, но и от «сложности» функции выигрыша g. Правда, и требование непрерывности вызывает некоторые вопросы.

Если вернуться на содержательный уровень, то агрегирование информации, которое моделируется отображением π, происходит где-то внутри компьютера. А компьютерными программами могут быть реализованы и вычисления разрывных функций.

Кроме того, топологии на множествах A и Q моделируют близость сообщений «по смыслу». А такое понятие близости может существенно отличаться от интернет–сообщества в целом (что моделируется топологией на A) и для конкретного пользователя (что моделируется топологией на Q).

Поэтому требование непрерывности отображения π в данной модели заслуживает отдельного обсуждения, выходящего за рамки данного доклада.

Отмеченные выше проблемы до известной степени смягчаются при использовании следующих конструкций. В разделе 3 предполагалось, что на множестве U задана некоторая топология. Следуя [8], будем называть ее внешней. На том же множестве можно задать другую топологию (назовем ее внутренней) следующим образом.

В качестве базы топологии рассмотрим множества

$$O(u,\varepsilon) = \{v \in U: \forall \alpha \in A \ |g(u,\alpha) - g(v,\alpha)| < \varepsilon\},$$

где $u \in U$ и ε – положительное действительное число.

Стандартными рассуждениями устанавливается, что при фиксированных u и α функция

$$\phi(v) = \max_{\alpha \in A} |g(u,\alpha) - g(v,\alpha)|$$

непрерывна во внешней топологии, следовательно, множества $O(u,\varepsilon)$ открыты относительно внешней топологии. Таким образом, внутренняя топология слабее внешней. Тогда непосредственно проверяется, что если пространство U компактно во внешней топологии, то оно компактно и во внутренней.

Кроме того, при любом фиксированном $\alpha \in A$ выполняется включение

$$O(u,\varepsilon) \subset \{v \in U: |g(u,\alpha) - g(v,\alpha)| < \varepsilon\}.$$

Отсюда немедленно следует, при любом фиксированном $\alpha \in A$ функция g непрерывна по u во внутренней топологии.

Правда, во внутренней топологии могут оказаться нарушенными условия отделимости. Но это легко поправить с помощью факторизации пространства U, считая эквивалентными управления u и v для которых равенство $g(u,\alpha) = g(v,\alpha)$ выполняется для всех $\alpha \in A$ (детали можно найти в следующем разделе данной статьи).

А тогда, все условия теоремы 3 будут выполнены, если в качестве топологии на множестве U рассматривать внутреннюю топологию. Значит, будет верен и вывод этой теоремы.

Таким образом, имеются две оценки размерности «оптимального» пространства Q, одна соответствующая внешней топологии, другая – внутренней.

Легко придумать пример, где новая оценка лучше старой. Пусть, например, функция выигрыша сепарабельна, т.е. $g(u,\alpha) = g'(u) + g''(\alpha)$. Тогда размерность множества U относительно внутренней топологии не будет превосходить 1, какова бы ни была его размерность относительно внешней топологии. То же, разумеется, относится и к размерности соответствующего пространства Q.

Вероятно, задачи, для которых старая оценка лучше новой, тоже существуют. Но, скорее всего, выглядят они достаточно экзотично.

6 Простейшая метрическая модель

Конструкции предыдущего раздела позволяют исследовать еще один вариант формализации рассматриваемой задачи. Начнем с его описания.

Пусть множество Q наделено метрикой. Если это множество компактно, то его можно с любой точностью аппроксимировать конечным множеством. Пусть для $\varepsilon > 0$ символ $N_Q(\varepsilon)$ обозначает наименьшее число элементов в ε-сети множества Q. Скорость роста величины $N_Q(\varepsilon)$ при уменьшении числа ε достаточно естественно можно рассматривать как меру сложности множества Q. Характеризовать эту скорость роста можно, например (нижней) размерностью Минковского, которая по определению равняется нижнему пределу

$$\mathrm{dml}Q = \liminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln N_Q(\varepsilon)}{-\ln \varepsilon}.$$

Как в разделе 3, рассмотрим схему управления, при которой информация о неопределенном факторе α с помощью отображения $\pi: A \to Q$ кодируется «сообщениями» из множества Q. Тогда эффективность управления можно характеризовать величиной, определяемой формулой (4). Естественно возникает вопрос: при каких значениях размерности $\mathrm{dml}Q$ эта величина может равняться $R = \min_{\alpha \in A} \max_{u \in U} g(u,\alpha)$.

Чтобы ответить на него, введем следующие обозначения. Назовем управления $u \in U$ и $v \in U$ эквивалентными, если $g(u,\alpha) = g(v,\alpha)$ для всех $\alpha \in A$. Фактор-множество множества U по этому отношению эквивалентности обозначим через U^*. Значение функции $g(u,\alpha)$ не зависит от выбора элемента u из класса эквивалентности $u^* \in U^*$. Поэтому корректно определена функция $g^*(u^*,\alpha)$, заданная условием $g^*(u^*,\alpha) = g(u,\alpha)$ для $u \in u^*$. Непосредственно проверяется, что равенством

$$\rho(u^*,v^*) = \max_{\alpha\in A}\left|g^*(u^*,\alpha) - g^*(v^*,\alpha)\right|$$

определяется метрика на множестве U^*. Пусть

$$d = \liminf_{\varepsilon\to 0+}\frac{\ln N_{U^*}(\varepsilon)}{-\ln\varepsilon}$$

обозначает размерность Минковского множества U^* относительно этой метрики.

Частичный ответ на поставленный двумя абзацами выше вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 5. Существуют метрическое пространство Q и отображение $\pi : A \to Q$, для которых выполняются условия $\mathrm{dml}Q \le d$ и

$$\max_{u_\pi\in U_\pi}\min_{\alpha\in A} g\Big(u_\pi\big(\pi(\alpha)\big),\alpha\Big) = R.$$

Доказательство. Пусть отображение φ: $U \to U^*$ ставит в соответствие элементу $u \in U$ содержащий его класс $u^* \in U^*$. Фиксируем произвольное отображение ϕ: $U^* \to U$, для которого $\phi(u^*) \in u^*$.

Определим функцию u_*: $A \to U$ условием

$$g(u_*(\alpha),\alpha) = \max_{u\in U} g(u,\alpha)\ \ \forall\alpha\in A.$$

Положим $Q = U^*$ и $\pi = \varphi\circ u_*$. Покажем, что множество Q и отображение π – искомые.

Неравенство $\mathrm{dml}Q \le d$ будет выполнено, если снабдить множество Q метрикой ρ.

Определим стратегию u_π: $Q \to U$ равенством $u_\pi = \phi\circ\pi$. Тогда для любого $\alpha \in A$ будем иметь

$$g(u_\pi(\alpha),\alpha) = g(\phi(\pi(\alpha)),\alpha) = g(\phi(\varphi(u_*(\alpha))),\alpha).$$

Но по построению $\phi(\varphi(u_*(\alpha))) = v$, где v – некоторый элемент множества U, эквивалентный $u_*(\alpha)$. Поэтому

$$g(u_\pi(\alpha),\alpha) = g(v,\alpha) = g(u_*(\alpha),\alpha) = \max_{u\in U} g(u,\alpha) \ge R.$$

В силу произвольности α получим отсюда

$$\min_{\alpha\in A} g(u_\pi(\alpha),\alpha) \ge R.$$

Тем более

$$\max_{u_\pi\in U_\pi}\min_{\alpha\in A} g\Big(u_\pi\big(\pi(\alpha)\big),\alpha\Big) \ge R.$$

Обратное неравенство очевидно. Теорема доказана.

Разумеется, можно рассматривать соответствующую задачу с ограниченным доступом к информации. Ее формализация аналогична постановке задачи из раздела 4. Основные идеи ее решения содержатся в данном разделе. А недостающие технические детали могут быть заимствованы из раздела 4. Поэтому приводить эти результаты вряд ли имеет смысл.

Если топология на множестве Q индуцируется метрикой ρ, то согласно теореме Понтрягина–Шнирельмана [9] выполняется неравенство $\dim Q \le \mathrm{dml}Q$. Этим устанавливается связь между задачей данного раздела и задачей из раздела 3.

Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что установлена справедливость принципа Доктора Пилюлькина. Как известно, доктор Пилюлькин лечил больных йодом и касторкой. При таком содержании аптечки можно утверждать, что без потери качества лечения всю полезную информацию о пациенте можно закодировать так, что для ее передачи или хранения будет достаточно одного бита (или двух, если допускается использование сразу двух средств в особо тяжелых случаях или отказа от лечения в случае симуляции). Семантика соответствующих сообщений тоже понятна. В конечном итоге смысл сообщения сводится к указанию на то, какой из двух возможных рецептов более подходит данному пациенту.

Говоря более серьезно, можно утверждать, что при избытке информации объем ее полезной части определяется в основном сложностью множества управлений оперирующей стороны и характером ее функции выигрыша. Количество всей доступной информации играет в этом случае второстепенное значение.

Сделанный вывод не зависит от того, как определяется само понятие «количество информации». Разумеется, выше были рассмотрены не все возможные способы определения этого понятия. Но простота и естественность доказательств позволяют рассчитывать на то, что и при других определениях вывод останется прежним.

Сам рассматриваемый принцип в явном виде, вероятно, ранее не формулировался, хотя вряд ли он является неожиданным. Использованная при его доказательстве техника тоже, скорее всего, не представляет самостоятельного интереса. А вот некоторые детали постановок задач кажутся достаточно важными, поскольку их можно использовать при построении других, более сложных и более интересных моделей.

Кроме того, в тексте были отмечены несколько проблем, допускающих различные решения. Какие-то способы их решения были предложены. Но не исключено, что существуют другие, более плодотворные способы.

Один нетривиальный вопрос можно ясно сформулировать уже для модели из раздела 1. Достаточно естественно выглядит алгоритм построения оптимального множества сообщений $T \in \Sigma$ путем последовательного добавления к текущему множеству сообщений нового сообщения, максимально увеличивающего текущий гарантированный результат. Интересно выяснить, всегда ли таким образом может быть получено оптимальное решение, или в каких-то случаях такой жадный алгоритм заводит в тупик?

Достаточно естественно выглядит другая, несколько более мягкая постановка вопросов, рассмотренных выше. А именно, можно искать решения, позволяющие получить максимальный гарантированный результат не абсолютно точно, а с какой-то фиксированной положительной погрешностью. Стоит подумать, нельзя ли при такой постановке вопроса получить нетривиальные качественные выводы.

На протяжении всего данного доклада делалось предположение, что вся доступная оперирующей стороне информация достоверна, или вся недостоверная информация уже «отсеяна». Но в том же Интернете имеется и недостоверная информация. По-видимому, задача выявления недостоверной информации напрямую не относится к теории принятия решений. Но, возможно, и совсем уж отделять ее от принятия решений не правильно. Действительно, неверная информация тоже может быть как важной, так и несущественной для принятия конкретного решения. И важно уметь отсеивать существенную недостоверную информацию. А при некоторых условиях задача в такой постановке может оказаться более простой.

И, разумеется, можно двигаться в сторону теории игр, разделив все неопределенные факторы на «природные» и неопределенность выбора разумных партнеров, на которых, в частности, может влиять выбор оперирующей стороны. Здесь возникает большой спектр задач, многие из которых ранее не исследовались.

Литература

1. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 287 с.
2. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
3. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. – Mass.: MIT Press, 2005. – 740 p.
4. *Колмогоров А.Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. Т. 1. 1965, № 1. – С. 3-11.
5. *Рашевский П.К.* О догмате натурального ряда // Успехи математических наук. Т. 28. 1973, № 4. – С. 243-246.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
7. *Горелов М.А.* Непрерывные информационные агрегаты в антагонистических играх // Динамика неоднородных систем. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2008. – С. 41-57.
8. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984. – 496 с.

9. *Понтрягин Л.С., Шнирельман Л.Г.* Об одном метрическом свойстве размерности // Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. – М.: ИЛ, 1948. – С. 210-218.