DOI:

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО CC-VAR ПОРТФЕЛЬ ИНВЕСТОРА НА КОМБИНАЦИИ РЫНКОВ

Агасандян Г.А.
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва
agasand17@yandex.ru

Аннотация: Инвестор является участником одновременно трех частично увязанных между собой рынков разных размерностей. Один из них является (для простоты) двумерным рынком, а два других – одномерными. Базовые активы одномерных рынков образуют пару базовых активов двумерного. Решение ищется в форме совмещения трех портфелей на совокупности трех рынков и основывается на анализе расхождений в относительных доходах, вызванных различием ценообразования на рынках. Приводится графическая иллюстрация платежных функций для вариантов комбинированного портфеля. Схема без труда переносится на рынки больших размерностей с естественным ограничением на размеры вычислений и возможности практической реализации.

Ключевые слова: континуальный критерийVaR, многомерный рынок, комбинация рынков, базовые активы, индикаторы, сценарии, базисные инструменты, процедура Неймана-Пирсона.

Введение

Континуальный критерий VaR (CC-VaR) требует построения из имеющихся на рынке инструментов такого портфеля, чтобы порождаемый им доход q удовлетворял неравенствам $\mathsf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1-\varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$ ($\mathsf{P}\{M\}$ – вероятность множества (события) M в соответствии с прогнозом инвестора) [1-4]. Монотонно возрастающая и непрерывная функция $\phi(\varepsilon)$ определяет рисковые предпочтения инвестора. Алгоритм оптимизации портфеля основан на анализе функции относительных доходов с использованием процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [5]. Базис для портфеля инвестора образуют индикаторы сценарного рынка.

В работе предполагается, что инвестор участвует сразу на трех рынках. Для простоты рассматривается случай одного двумерного рынка #0 и двух одномерных #1 и #2. При этом базовые активы одномерных рынков образуют пару базовых активов двумерного. Решение ищется в виде комбинации трех портфелей, притом для дискретных сценарных рынков.

1 Инструментарий и ставки теоретических δ-рынков

Рассматриваются однопериодный тройственный рынок с двумя базовыми активами X и Y; для множеств их цен используются обозначения X и Y. Задаются стоимостная и прогнозная плотности для двумерного рынка соответственно $c(x, y)$ и $p(x, y)$, для одномерных – $c_{\mathsf{X}}(x)$ и $p_{\mathsf{X}}(x)$, $c_{\mathsf{Y}}(y)$ и $p_{\mathsf{Y}}(y)$. При этом плотности $p_{\mathsf{X}}(x)$ и $p_{\mathsf{Y}}(y)$ совпадают с маргинальными плотностями для $p(x, y)$, так как задаются инвестором в едином прогнозе на конец периода, но $c_{\mathsf{X}}(x)$ и $c_{\mathsf{Y}}(y)$ могут задаваться произвольно: они формируются на начало периода разными рынками. Важными для анализа и оптимизации служат относительные доходы $\rho(\cdot,\cdot) = p(\cdot,\cdot)/c(\cdot,\cdot)$, $\rho_{\mathsf{X}}(\cdot) = p_{\mathsf{X}}(\cdot)/c_{\mathsf{X}}(\cdot)$, $\rho_{\mathsf{Y}}(\cdot) = p_{\mathsf{Y}}(\cdot)/c_{\mathsf{Y}}(\cdot)$.

Платежная функция (функция доходов) произвольного одномерного инструмента $\boldsymbol{G}$ обозначается $\pi(\cdot; \boldsymbol{G})$, двумерного – $\pi(\cdot,\cdot; \boldsymbol{G})$, его рыночная стоимость – $|\boldsymbol{G}|$, а средний доход – $\|\boldsymbol{G}\|$. Базисными на рынке являются инструменты $\boldsymbol{D}_{\mathsf{X}}(s)$, $s \in \mathsf{X}$, с δ-функцией в качестве платежной: $\pi(x; \boldsymbol{D}_{\mathsf{X}}(s)) \equiv \delta(x - s)$. Для них цены и средние доходы соответственно равны

$$\left|\boldsymbol{D}_{\mathsf{X}}(s)\right| = c_{\mathsf{X}}(s), \quad \left\|\boldsymbol{D}_{\mathsf{X}}(s)\right\| = p_{\mathsf{X}}(s), \quad s \in \mathsf{X}.$$

Для произвольной измеримой функции $g(x)$, $x \in \mathsf{X}$, инструмент G_{X} с $\pi(x, y; G_{\mathsf{X}}) = g(x)$ и его стоимость определяются формулами

$$\boldsymbol{G}_{\mathsf{X}} = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} g_{\mathsf{X}}(s)\,\boldsymbol{D}_{\mathsf{X}}(s)\,ds, \quad |\boldsymbol{G}_{\mathsf{X}}| = \int_{\mathsf{X}} g_{\mathsf{X}}(s)\,c_{\mathsf{X}}(s)\,ds.$$

Платежная функция произвольного инструмента $\boldsymbol{G}$ *двумерного* рынка с базовыми активами X и Y обозначается $\pi(x, y; \boldsymbol{G})$. Базисными на двумерном рынке являются инструменты $D(s, t)$, $s \in \mathsf{X}$, $t \in \mathsf{Y}$, с $\pi(x, y; \boldsymbol{D}(s, t)) \equiv \delta(x, y; s, t)$. Для них

$$\left|\boldsymbol{D}(s,t)\right| = c(s,t), \quad \left\|\boldsymbol{D}(s,t)\right\| = p(s,t), \quad s \in \mathsf{X},\ t \in \mathsf{Y}.$$

Инструмент $\boldsymbol{G}$ с произвольной измеримой платежной функцией $g(x, y) = \pi(x, y; \boldsymbol{G})$, его стоимость и средний доход определяются соответственно формулами

$$\boldsymbol{G} = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} g(s,t)\boldsymbol{D}(s,t)\,dsdt, \quad \|\boldsymbol{D}(s,t)\| = p(s,t), \quad s \in \mathsf{X},\ t \in \mathsf{Y},$$

$$|\boldsymbol{G}| = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} g(s,t)c(s,t)\,dsdt, \quad \|\boldsymbol{G}\| = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} g(s,t)\,p(s,t)\,dsdt.$$

Вводятся *индикаторы* $\boldsymbol{H}\{M\}$ – инструменты с характеристическими функциями множеств $M\subset\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$ в качестве платежных, а также *единичный безрисковый* актив $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{H}\{M\} = \int_M \boldsymbol{D}(s,t)\,dsdt, \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{H}\{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}\} = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} \boldsymbol{D}(s,t)\,dsdt,$$

$$|\boldsymbol{H}\{M\}| = \int_M c(s,t)\,dsdt, \quad |\boldsymbol{U}| = \mathsf{C}\{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}\} = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} c(s,t)\,dsdt = 1/r,$$

где r означает безрисковый относительный доход за период.

Наряду с введенными инструментами *двумерного* рынка рассматриваются и его *маргинальные* инструменты $\boldsymbol{D}_1(\cdot)$, $\boldsymbol{D}_2(\cdot)$, $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{H}_1\{\cdot\}$, $\boldsymbol{H}_2\{\cdot\}$, но каждый из них не самостоятелен и обретает смысл лишь в паре (в произведении) с каким либо инструментом другого одномерного рынка [4].

Для инструментов *самостоятельных* одномерных рынков применяются обозначения $\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\cdot)$, $\boldsymbol{D}_{\mathrm{Y}}(\cdot)$, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{Y}}$, $\boldsymbol{H}_{\mathrm{X}}\{\cdot\}$, $\boldsymbol{H}_{\mathrm{Y}}\{\cdot\}$.

Если для упрощения рассматривать вариант комбинации рынков, связанных настолько, что между ними арбитраж легко реализуем, то это приводит к согласованию ставок на рынках. В результате на одномерных рынках возникают ставки безрискового относительного дохода χ и χ^{-1}, такие что $c_{\mathrm{X}}(x) \equiv \chi^{-1}c_1(x)$, $x\in\mathsf{X}$, и $c_{\mathrm{Y}}(y) \equiv \chi c_2(y)$, $y\in\mathsf{Y}$. Но нас больше интересует самый общий случай отсутствия ограничений на ценообразование, и мы рассматриваем далее именно его. Такой вариант уместен в предположении, что арбитраж по рынкам затруднен или даже невозможен.

2 Комбинированный сценарный портфель

Сценарии на первом одномерном рынке #X обозначаются $S_i \subset \mathsf{X}$, $i\in I = \{1, \ldots, n_1\}$, на втором рынке #Y – $T_j \subset \mathsf{Y}$, $j\in J = \{1, \ldots, n_2\}$. Базисными на рынке #X являются сценарные инструменты $\boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i}$, $S_i \subset \mathsf{X}$, с характеристической функцией в качестве платежной, т.е. индикаторы сценариев. Аналогично образуются базисные инструменты для рынка #Y. Сценарии на двумерном рынке #0 образуются произведением одномерных сценариев, а его базисными инструментами служат индикаторы сценариев $\boldsymbol{D}_{i,j}$, $S_i \subset \mathsf{X}$, $T_j \subset \mathsf{Y}$.

В общем варианте для целей оптимизации следует заново формировать функцию относительного дохода для комбинации трех рынков. Будем отправляться от функции относительного дохода для исходного двумерного рынка $\rho_{i,j}$ и заменять для каждого двумерного сценария ее значения соответствующими значениями относительных доходов $\rho_{\mathrm{X};i}$ или $\rho_{\mathrm{Y};j}$ для исходных одномерных рынков (с сопоставимыми по вероятностям весами), притом ровно теми, которые оказываются больше. Условия замещения представим в виде (отождествляем сценарии с их индексами)

$$(i,j)\in M_0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\rho_{ij} \ge \rho_{\mathrm{X};i} \,\&\, \rho_{ij} \ge \rho_{\mathrm{Y};j}\},$$

$$(i,j)\in M_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{\rho_{\mathrm{X};i} > \rho_{ij} \,\&\, \rho_{\mathrm{X};i} \ge \rho_{\mathrm{Y};j}\}, \qquad (i,j)\in M_2 \quad \Leftrightarrow \quad \{\rho_{\mathrm{Y};j} > \rho_{ij} \,\&\, \rho_{\mathrm{Y};j} > \rho_{\mathrm{X};i}\}.$$

Обозначаем через $M_{1;i}$ и $M_{2;j}$ сечения множеств M_1 и M_2 фиксированием i и j соответственно и вводим инструменты $M_{1;i}$ и $M_{2;j}$ как индикаторы множеств $M_{1;i}$ и $M_{2;j}$:

$$(1) \quad \boldsymbol{M}_{1;i} = \sum_{j\in M_{1;i}} \boldsymbol{D}_{ij}, \quad |\boldsymbol{M}_{1;i}| = \sum_{j\in M_{1;i}} c_{ij}, \quad \|\boldsymbol{M}_{1;i}\| = \sum_{j\in M_{1;i}} p_{ij};$$

$$(2) \quad \boldsymbol{M}_{2;j} = \sum_{i\in M_{2;j}} \boldsymbol{D}_{ij}, \quad |\boldsymbol{M}_{2;j}| = \sum_{j\in M_{2;j}} c_{ij}, \quad \|\boldsymbol{M}_{2;j}\| = \sum_{i\in M_{2;j}} p_{ij}.$$

Замещать надлежит каждый инструмент $\boldsymbol{M}_{1;i}$ в инструменте двумерного рынка (1) инструментом одномерного рынка $D_{\mathrm{X};i}$, $i\in I$, и $M_{2;j}$ в (2) – инструментом $D_{\mathrm{Y};j}$, $j\in J$. Однако замещение $\boldsymbol{M}_{1;i}$ инструментом

$\boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i}$ распространяется при этом не только на множество $M_{1;i}$, а на все множество Y. Поэтому подобное замещение должно быть ограниченным, и инструменты**Ошибка! Источник ссылки не найден.** $\boldsymbol{M}_{1;i}$ желательно заместить «гибридным» инструментом, совмещающим рынки #0 и #*X*,

$$\boldsymbol{M}_{1;i} \to \boldsymbol{M}_{\mathrm{X};i} \equiv \boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i} \times \boldsymbol{H}_2 \left\{ M_{1;i} \right\}.$$

Но таких инструментов $M_{\mathrm{X};i}$, $i \in I$, нет ни на одном из наших рынков. Но нам поможет механизм *рандомизации*. Решение видится в построении случайного портфеля посредством *биномиальной случайной величины* $\vartheta_{\mathrm{X};i}$ с вероятностью успеха (замещения) $\theta_{\mathrm{X};i}$:

$$(3)\quad \boldsymbol{D}^{cmb}_{\mathrm{X};i} = \vartheta_{\mathrm{X};i} \boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i} \times \boldsymbol{U}_2, \quad \theta_{\mathrm{X};i} = \sum\nolimits_{j \in M_{1;i}} p_{ij} \Big/ p_{1;i}, \quad \left| \boldsymbol{D}^{cmb}_{\mathrm{X};i} \right| = \theta_{\mathrm{X};i} c_{\mathrm{X};i}, \quad \left\| \boldsymbol{D}^{cmb}_{\mathrm{X};i} \right\| = \theta_{\mathrm{X};i} p_{1;i}.$$

Подобный выбор параметров θ_i обусловлен требованием уравнивать вероятности, связанные с инструментами $\vartheta_i \boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i}$ (3) (порождаемые ими средними доходами), с соответствующими вероятностями, связанными с инструментами $\boldsymbol{M}_{1;i}$ (1). Так строится базис для рынка #1, и аналогично – для рынка #2. Оптимальный *комбинированный* портфель приобретает вид

$$(4)\quad \boldsymbol{G}^{cmb} = \sum\nolimits_{i \in I} g^{cmb}_{\mathrm{X};i} \vartheta_i \boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i} + \sum\nolimits_{j \in J} g^{cmb}_{\mathrm{Y};j} \vartheta_j \boldsymbol{D}_{\mathrm{Y};j} + \sum\nolimits_{(i,j) \in M_0} g^{cmb}_{ij} \boldsymbol{D}_{ij}.$$

Если заменить инструменты в первых двух суммах не реализуемыми на нашем рынке, но сохраняющими доход инструментами с идентичными весами

$$\boldsymbol{M}^{cmb}_{\mathrm{X};i} \equiv \boldsymbol{D}^{cmb}_{\mathrm{X};i} = \vartheta_{\mathrm{X};i} \boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i} \times \boldsymbol{U}_2, \quad \boldsymbol{M}^{cmb}_{\mathrm{Y};j} \equiv \boldsymbol{D}^{cmb}_{\mathrm{Y};j} = \vartheta_{\mathrm{Y};j} \boldsymbol{D}_{\mathrm{Y};j} \times \boldsymbol{U}_1,$$

получаем упрощенный двумерный портфель, называемый *идеалистичной* версией комбинированного портфеля, которая удобна для графической иллюстрации,

$$(5)\quad \boldsymbol{G}^{idl} = \sum\nolimits_{i \in I} g^{cmb}_{\mathrm{X};i} \boldsymbol{M}_{\mathrm{X};i} + \sum\nolimits_{j \in J} g^{cmb}_{\mathrm{Y};j} \boldsymbol{M}_{\mathrm{Y};j} + \sum\nolimits_{i \in I, j \notin M_i} g^{cmb}_{ij} \boldsymbol{D}_{ij},$$

$$(6)\quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{X};i} \equiv \boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i} \times \boldsymbol{H}_2 \left\{ M_{1;i} \right\}, \quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{Y};j} \equiv \boldsymbol{D}_{\mathrm{Y};j} \times \boldsymbol{H}_1 \left\{ M_{2;j} \right\}.$$

В иллюстративном примере используется функция рисковых предпочтений инвестора $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^2$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Все релевантные плотности основываются на β-распределениях с плотностями $\beta(x; u, v)$, $x \in [0, 1)$, $u, v > 0$. Вводится вспомогательная функция

$$f(x, y; u, v) = N(u, v) \cdot \left\{ y^{u-1} (1-x)^{v-1},\ x > y;\ x^{u-1} (1-y)^{v-1},\ x < y \right\},$$

где $N(u, v)$ – нормирующий множитель. Двумерные плотности задаются в виде

$$p(x, y) = \omega_p f(x, y; 3, 2) + (1 - \omega_p) \beta(x; 3, 3) \beta(y; 3, 3),$$

$$c(x, y) = \omega_c f(x, y; 2.8, 1.8) + (1 - \omega_c) \beta(x; 3, 3) \beta(y; 3, 3), \quad \omega_p = \omega_c = 0.5.$$

Стоимостные плотности для рынков #X и #Y формируются независимо, и, вообще говоря, $c_{\mathrm{X}}(x) \neq c_1(x)$. В примере принимается, что

$$c_{\mathrm{X}}(x) = \omega_x c_1(x) + (1 - \omega_x) \beta(x; 2, 2), \quad \omega_x = 0.9,$$

$$c_{\mathrm{Y}}(y) = \omega_y c_2(x) + (1 - \omega_y) \beta(y; 2, 2), \quad \omega_y = 0.9.$$

В работе принимается $n_1 = 13$, $n_2 = 12$; что дает $n = n_1 \times n_2 = 156$ двумерных сценариев.

На рис. 1 приводятся графики доходов оптимальных комбинированных портфелей в идеалистичной версии (5) с применением (6): (слева направо) для тройственного рынка (комбинации #0, #*X*, #*Y*) и двух спаренных рынков (#0, #*X*) и (#*X*, #*Y*).

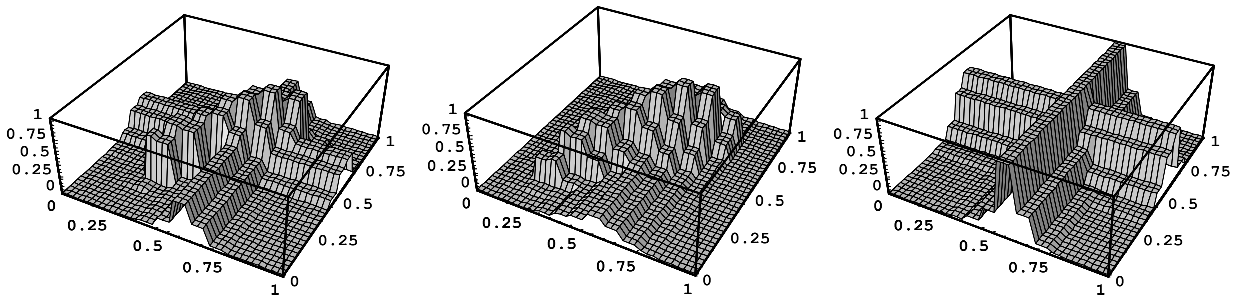

Рис. 1. Доходы комбинированных портфелей.

Подобные графики дают лишь общее представление о решении для тройственного рынка (и его усеченных вариантов). Подлинную картину доходов дает формула (4) с разбиением общего портфеля на три (или две) компоненты, не говоря уже о встроенной в нее рандомизации.

Литература

1. *Agasandian G.A.* Optimal Behavior of an Investor in Option Market / International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). – P. 1859-1864.
2. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
3. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов. М.: ВЦ РАН, 2015. 297 с.
4. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами. // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН, 2018. Вып. 73. С. 6-26.
5. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)