СЕКЦИЯ 4: ИМИТАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ

DOI:

МНОГОМЕРНЫЕ РЫНКИ ОПЦИОНОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПО CC-VAR

Агасандян Г.А.
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва
agasand17@yandex.ru

Аннотация: *Рассматривается проблема распространения методологии CC-VaR на задачи построения оптимального портфеля инвестора для рынков с несколькими базовыми активами. Суть в том, что для более полного учета вероятностных свойств активов финансового рынка часто бывает недостаточно ограничиваться лишь привычными корреляционными свойствами активов второго порядка. Специальным образом определяется теоретический многомерный рынок, формируется его инструментарий и приводится алгоритм построения оптимального по CC-VaR портфеля. Предлагаемые конструкции иллюстрируются примером построения оптимального портфеля для двумерного рынка. Пример исследуется аналитическими средствами, составляющими сущность теоретического алгоритма.*

Ключевые слова: континуальный критерий VaR, многомерный рынок, базовые активы, сценарии, индикаторы, базисные инструменты, процедура Неймана-Пирсона.

Введение

Работа рассматривает проблему распространения методологии континуального критерия VaR (CC-VaR) [1-4] на задачи построения оптимального портфеля инвестора для однопериодных рынков с несколькими базовыми активами.

Заданы $p(x)$ и $c(x)$ – соответственно прогнозная (на конец периода) и стоимостная (на начало периода) плотности цены базового актива, $x \in \mathsf{X}(\subset \Re)$ – произвольный интервал на вещественной прямой. В простом случае ищется портфель, доставляющий минимум инвестиционной сумме при выполнении требований CC-VaR. Они состоят в выполнении неравенств $\mathsf{P}\{q \ge \phi(\varepsilon)\} \ge 1-\varepsilon$ сразу для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$, где q – доход, $\phi(\varepsilon)$ – неубывающая неотрицательная *функция рисковых предпочтений* (ф. р. п.) инвестора (P – вероятностная мера, задаваемая инвестором). Решение основывается на анализе функции относительных доходов $\rho(\cdot) = p(\cdot)/c(\cdot)$ и континуальном использовании процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [5].

Однако присутствие на финансовых рынках многих связанных между собой активов требует их совместного рассмотрения для полноценного отражения вероятностных свойств финансового рынка в целом.

1 Теоретические δ-рынки

Основная структура однопериодного многомерного теоретического δ-рынка во многом повторяет структуру одномерного, только доход по его инструментам определяется совокупностью будущих цен всех n базовых активов и некоторые скалярные величины становятся векторами. Пусть $\mathbf{X} = \prod_{i \in N} \mathsf{X}_i$, $\mathsf{X}_i \subset \Re$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, n – размерность рынка. Заданы две неотрицательные функции $p(\boldsymbol{x})$ и $c(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$, порождающие меры $\mathsf{P}\{M\}$ и $\mathsf{C}\{M\}$, $M \subset \mathbf{X}$, первая из которых – *прогнозная* мера, являющаяся прогнозом инвестора на конец периода, а вторая – *стоимостная* мера, которую предоставляет рынок. Построение оптимального портфеля инвестора основано на анализе *функция относительных доходов* $\rho(\boldsymbol{x}) \equiv p(\boldsymbol{x})/c(\boldsymbol{x})$, $x \in \mathbf{X}$, с использованием процедуры Неймана-Пирсона [5] и повторяющий (с очевидными изменениями) континуальный алгоритм [3, 4].

Платежная функция произвольного инструмента I обозначается $\pi(x; I)$, $|I|$ – его рыночная стоимость, рассчитанная по плотности $c(x)$, а $\|I\|$ – средний с точки зрения инвестора доход, рассчитанный по плотности $p(x)$ и интерпретируемый также как его справедливая стоимость.

Вводятся так называемые δ-инструменты $\boldsymbol{D}(s)$ с обобщенными n-мерными δ-функциями относительно s в качестве платежных, т.е.

$$\pi\left(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})\right) = \delta\left(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}\right) = \delta\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}\right), \text{ при этом } \left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})\right| = c(\boldsymbol{s}), \ \left\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})\right\| = p(\boldsymbol{s}).$$

Инструменты $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{s} \in \mathbf{X}$, играют роль базисных, и инструмент (портфель) $\boldsymbol{G}$ с произвольной измеримой платежной функцией $g(\boldsymbol{x})$ имеет вид

$$(1)\quad \boldsymbol{G}=\int_{\mathsf{X}} g(\boldsymbol{s})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}\text{, при этом } |\boldsymbol{G}|=\int_{\mathsf{X}} g(\boldsymbol{s})c(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s},\quad \|\boldsymbol{G}\|=\int_{\mathsf{X}} g(\boldsymbol{s})p(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}.$$

В частности, рассматриваются такие инструменты, как *индикаторы множеств* $\boldsymbol{H}\{M\}$, $M\subset\mathbf{X}$, и единичный безрисковый актив $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{H}\{\mathbf{X}\}$:

$$\boldsymbol{H}\{M\}=\int_M \boldsymbol{D}(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s},\quad \boldsymbol{U}=\boldsymbol{H}\{\mathbf{X}\},\quad |\boldsymbol{U}|=\mathsf{C}\{\mathbf{X}\}=\int_{\mathsf{X}} c(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}=1/r,$$

где r имеет смысл безрискового дохода за период.

Без ущерба для общности принимается $r\equiv 1$. Такое упрощение на многомерном рынке может быть оправдано лишь в силу неявного предположения о том, что на нем допустима *только* совместная торговля всех базовых активов.

На теоретическом рынке в соответствии с (1) может быть сконструирован практически любой инструмент. По аналогии с одномерным рынком можно вводить и опционы. Некоторая специфика, тем не менее, имеется, но об этом позже.

2 Пример оптимизации по CC-VaR на δ-рынке

Рассматривается двумерный δ-рынок с множествами значений двух базовых активов $\mathsf{X}=\mathsf{Y}=[-1,1]$. На $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$ заданы *стоимостная* и *прогнозная* плотности, образующие *функцию относительных доходов*, и пусть

$$c(x,y)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{x-y}{16},\quad p(x,y)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{x+y}{16},\ \text{и тогда}\ \rho(x,y)=\tfrac{p(x,y)}{c(x,y)}=\tfrac{4+x+y}{4+x-y},\ x\in X,\ y\in Y.$$

Параметризация $\rho(x,y)=\tau$, где $\tau\in[\tau',\tau'']$, $\tau'=½$, $\tau''=2$, порождает семейство множеств

$$Z(\tau)=\{(x,y)\,|\,\rho(x,y)\le\tau\},\quad \tau\in[\tau',\tau''].$$

Решение неравенств в условии правой части дает

$$Z(\tau)=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{lll} -1<y<\frac{-4+4\tau-x+\tau x}{1+\tau}, & -1<x<\frac{3-5\tau}{-1+\tau}, & \frac{1}{2}<\tau\le\frac{2}{3};\\ -1<y<\frac{-4+4\tau-x+\tau x}{1+\tau}, & -1<x<1, & \frac{2}{3}<\tau\le\frac{3}{2};\\ -1<y<\frac{-4+4\tau-x+\tau x}{1+\tau}, & -1<x<\frac{5-3\tau}{-1+\tau}, & \frac{3}{2}<\tau\le 2;\\ -1<y<1, & \frac{5-3\tau}{-1+\tau}<x<1, & \frac{3}{2}<\tau\le 2. \end{array}\right.\right\},$$

Вычисление меры $\mathsf{P}\{Z(\tau)\}$, $\tau\in[\tau',\tau'']$, надлежащим интегрированием дает связь параметра τ с уровнем вероятности ε, т.е. *прогнозную функцию* (относительных доходов)

$$(2)\quad \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)(=\varepsilon)=\begin{cases} -\dfrac{(1-2\tau)^2(-1-4\tau+3\tau^2)}{12(-1+\tau^2)^2}, & \frac{1}{2}<\tau\le\frac{2}{3};\\ \dfrac{7(-1-2\tau+6\tau^2)}{12(1+\tau)^2}, & \frac{2}{3}<\tau\le\frac{3}{2};\\ -\dfrac{(-2+\tau)(1+4\tau)(1-2\tau+3\tau^2)}{12(-1+\tau^2)^2}+\dfrac{6-13\tau+6\tau^2}{4(-1+\tau)^2}, & \frac{3}{2}<\tau\le 2. \end{cases}$$

Ключевым значениям аргумента $\tau=1/2,\ 2/3,\ 3/2,\ 2$ отвечают соответственно значения прогнозной функции $\varepsilon=0,\ 7/100,\ 133/150,\ 1$. Фактически, построена система оптимальных двумерных множеств $\{Q_\varepsilon,\ \varepsilon\in[0,1]\}$, где $Q_\varepsilon=\mathrm{Z}(\tau)$ с $\mathsf{P}\{Q_\varepsilon\}=\varepsilon$, если $\varepsilon=\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)$, $\tau\in[\tau',\tau'']$.

В соответствии с теоретическим алгоритмом оптимизации [3,4] функция упорядочения и оптимальная весовая функция определяются соответственно равенствами

$$(3)\quad w(x,y)=\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\rho(x,y)),\quad g(x,y)=\phi(w(x,y))=\phi(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\rho(x,y)))=\phi\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}\left(\tfrac{4+x+y}{4+x-y}\right)\right),\ x\in X,\ y\in Y.$$

Стоимостная функция (относительных доходов) находится, как и прогнозная, надлежащим интегрированием, реализующим на этот раз вычисление меры $\mathsf{C}\{\cdot\}$ множеств $Z(\tau)$, $\tau\in[\tau',\tau'']$. Имеем место

$$(4)\quad \mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau) = \mathsf{C}\{Q_\varepsilon\} = \begin{cases} \frac{1}{24}\left(-16 + \frac{1}{(-1+\tau)^2} + \frac{27}{(1+\tau)^2}\right), & \frac{1}{2} < \tau \le \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{12}\left(19 - \frac{49}{(1+\tau)^2}\right), & \frac{2}{3} < \tau \le \frac{3}{2}; \\ \frac{6-13\tau+6\tau^2}{4(-1+\tau)^2} + \frac{6+\tau(-25+\tau(33+(3-7\tau)\tau))}{12(-1+\tau^2)^2}, & \frac{3}{2} < \tau \le 2. \end{cases}$$

Значениям аргумента $\tau = 1/2, 2/3, 3/2, 2$ отвечают соответственно значения стоимостной функции 0, 17/150, 93/100, 1.

Наконец, *диссонанта* $\gamma(\cdot)$ должна определяться из (2) и (4) как $\gamma(\varepsilon) = \mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon))$, $\varepsilon\in[0, 1]$, поскольку $\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau) \equiv \gamma(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau))$, $\tau\in[\tau', \tau'']$. Однако выразить ее аналитически уже не удается. Для ее (приближенного) нахождения следует использовать численные методы.

Средний доход R, определяемый лишь ф. р. п. инвестора, вычисляется привычным образом. Окончательный результат дается для $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^\lambda$, $\lambda > 0$:

$$R = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\varepsilon = (1+\lambda)^{-1}.$$

Инвестиционная сумма A и средняя доходность y оптимального портфеля находятся использованием представлений (2) и (4) с предварительной трансформацией в операции интегрирования суперпозиции функций. Имеем соответственно

$$A = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\gamma(\varepsilon) = \int_{\tau'}^{\tau''} \phi(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau))\,d\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau), \quad y = R/A - 1 > 0.$$

Оптимальный портфель двумерных δ-инструментов дается, как и в одномерном случае, представлением

$$\boldsymbol{G} = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} g(x,y)\,\boldsymbol{D}(x,y)\,dxdy,$$

где $g(x, y)$ определяется формулой (3).

Таким образом, при решении задачи оптимизации на теоретическом δ-рынке в данном примере с несколько «неестественными» плотностями удается продвинуться достаточно далеко в получении аналитического решения, однако подобрать подобные примеры бывает не так уж легко, не говоря уже о решении более-менее реальных задач. Поэтому возникает потребность в нахождении решения задачи оптимизации численно. Именно так мы должны были поступить и в данном примере, в частности, с вычислением диссонанты.

3 Многомерные опционы и их производные

Особый интерес представляет проблема определения на δ-рынке многомерных аналогов обычных опционов. Структура базисных инструментов $\boldsymbol{D}(s)$ подсказывает нам решение. Вводятся так называемые α-опционы. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – векторы соответственно цен базовых активов $x_i\in\mathsf{X}_i$, страйков $s_i\in\mathsf{X}_i$, $i\in N$, и чисел −1 и +1 в любом порядке, характеризующих тип опциона. Тогда α-опцион $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ – это инструмент с платежной функцией

$$(5)\quad a(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s};\boldsymbol{\alpha}) = \pi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s};\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s};\boldsymbol{\alpha})) = \prod_{i\in N} \max(0, \alpha_i(x_i - s_i)).$$

Это значит, что для α-опциона справедливо представление

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s};\boldsymbol{\alpha}) = \int_{\mathfrak{R}^n} a(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s};\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Векторный параметр $\boldsymbol{\alpha}$ характеризует тип опциона (подобно одномерным опционам, принимающим обличье колла или пута). При этом α-опцион по i-й координате (i-му базовому активу) при $\alpha_i = +1$ ведет себя как обычный колл, при $\alpha_i = -1$ – как пут.

С учетом определения (5) сам α-опцион в таком случае приобретает вид

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s};\boldsymbol{\alpha}) \equiv \prod_{i\in N} \boldsymbol{O}_i^{\alpha_i}(s_i), \quad \boldsymbol{O}_i^{\alpha_i}(s_i) \equiv \{\boldsymbol{C}_i(s_i),\ \alpha_i = +1;\quad \boldsymbol{P}_i(s_i),\ \alpha_i = -1\}.$$

Первая $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ *и вторая* $\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ производные от α-опциона $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ определяются как инструменты с платежными функциями, равными смешанным производным от $a(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ по всем компонентам $\boldsymbol{x}$

первого и второго порядка соответственно. При этом $\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{D}(s)$, и потому опционы $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ могут образовывать базис из α-опционов. Также и опционы $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{\alpha})$ могут образовывать базис из ζ-опционов – многомерных аналогов бинарных опционов. (Термин «производная» здесь понимается как в финансовом, так и в математико-аналитическом смысле.)

Литература

1. *Agasandian G.A.* Optimal Behavior of an Investor in Option Market / International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). – P. 1859-1864.
2. *Агасандян Г.А.* Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов // Экономика и математические методы. 2005. Т. 41, №4. С. 88-98.
3. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
4. *Агасандян Г.А*. Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами. // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН, 2018. Вып. 73. С. 6-26.
5. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)