DOI:

УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА В КОНТУРЕ УПРАВЛЕНИЯ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ

Гусев В.Б.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

gusvbr@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача расчета автономного управления нестационарной системой, использующего только значения целевой функции на дискретном наборе моментов времени. Для расчета управления предложен алгоритм экстремального регулятора. Сформулированы условия его работоспособности. Применение алгоритма демонстрируется на модели управления развитием производственных мощностей и выпуском продукции.

Ключевые слова: нестационарная система, автономное управление, экстремальный регулятор, безусловная оптимизация, нестационарная задача, условия работоспособности алгоритма.

Введение

Для процессов развития характерны эффекты самоорганизации. Основная особенность этих эффектов заключается в синергии, упорядоченности, целенаправленности поведения сложной системы при относительной хаотичности поведения отдельных элементов (подсистем) [1]. Наряду с самоорганизацией, развитие систем может сопровождаться явлениями хаоса, кризисными, форс-мажорными состояниями, и даже гибелью той или иной части подсистем. Причины кризисных явлений могут иметь, как внешнее, так и внутреннее происхождение.

Эволюция развивающихся систем в процессе филогенеза придает им дополнительные качества, позволяющие длительное время сохранять свою идентичность в условиях изменения, как внешней среды, так и собственных элементов. Эти качества развивающихся систем обозначают определенную степень самодостаточности и жизнеспособности систем. Признаком жизнеспособных развивающихся систем является длительный или неограниченный период функционирования на фоне кризисных явлений, достигаемый самоорганизацией, целесообразным поведением, определенной степенью автономности. Жизнеспособность реализуется благодаря способности воспроизводства собственной функциональности и внутренних ресурсов с участием механизмов управления. Примерами жизнеспособных систем могут быть биологические организмы, экологические и социально-экономические системы различного масштаба. Жизнеспособность биологических систем обеспечивается механизмами воспроизводства физиологического состояния организма (гомеостаза), воспроизводства собственной популяции, синергией подсистем. Жизнеспособность развивающихся социально-экономических систем обеспечивается механизмами воспроизводства ресурсов и внутренней структуры, целенаправленным управлением.

В общем случае жизнеспособность системы в ситуации кризиса или форс-мажора в зависимости от их источников и причин обеспечивается следующими механизмами:

- Для парирования внешних причин кризиса – разумной автономностью системы, сохраняющей ее идентичность и самодостаточность. Внешняя среда функционирования жизнеспособных развивающихся систем содержит определенную часть источников их жизнеобеспечения. Парадигма автономности таких систем связывает свойство их жизнеспособности с возможностью функционирования в неблагоприятных форс-мажорных условиях, порождаемых разрывом внешних связей. Качество автономного функционирования системы характеризует ее потенциальную способность сохранять жизнеспособность в неблагоприятных ситуациях, порождаемых внешней средой.
- Для устранения внутренних причин кризиса – жизнеспособность обеспечивается механизмами автономного управления, дополняющими эффект самоорганизации. Модели автономного управления ориентируются на ограниченные информационные и внутренние материальные ресурсы, что является предпосылкой устойчивого и сбалансированного развития в условиях внешних ограничений и нестабильности [2]. Сбалансированный характер развития национальной экономики, региональных и производственно-хозяйственных систем обеспечивает гарантированный рост объемов по всей структуре выпусков и стабильный характер роста экономики в целом.

Таким образом, при непредсказуемых неблагоприятных ситуациях (форс-мажоре) живучесть системы, способность к выживанию связана с возможностью функционировать за счет управления внутренними резервами в режиме определенной (разумной) автономии. Жизнеспособность систем тестируется неблагоприятными форс-мажорными ситуациями, изменением внутренних или внешних условий. Если угроза форс-мажора является актуальной, целесообразно иметь оценки результатов автономного функционирования системы, а также модели соответствующих процессов функционирования и управления. Построение моделей управления развивающимися системами учитывает указанные особенности: целесообразное поведение системы при наличии большого числа активных агентов, определенная степень автономности, длительный или неограниченный период функционирования. Оценки результатов автономного функционирования и управления определяют степень жизнеспособности системы и возможности ее повышения.

Математические модели, используемые при управлении рассматриваемыми системами в кризисные периоды, могут иметь малую точность, или просто замещаться набором целевых показателей. Ситуация усугубляется тем, что в имеющейся статистической отчетности обычно приводятся показатели состояния хозяйства только через определенные периоды (месяц, квартал, год). Все это требует учета при разработке соответствующих методов управления.

Специфика рассматриваемого ниже механизма принятия решений заключается в том, что здесь используется информация только о целевом показателе состояния системы, измеряемом только в дискретные моменты времени. Следствием таких предположений следует ожидать увеличение погрешности решения по сравнению с методами, использующими точные оценки производных целевой функции. Более того, поскольку предсказывать поведение системы в каждый промежуточный момент при исходных данных для дискретного времени возможно только приближенно, следует ожидать, что погрешность решения с течением времени не будет убывать до нуля, то есть, погрешность является неустранимой. Очевидно, ее величина должна увеличиваться с ростом интервала дискретизации и темпа изменения целевого показателя.

Таким образом, целью является разработка алгоритма экстремального регулирования с дискретным временем, обеспечивающего допустимую (контролируемую) величину погрешности управления, а также определение условий, которым должны удовлетворять шкала времени и используемые целевые показатели.

1 Постановка задачи

Пусть целевая функция $f(t,u)$ имеет непрерывные производные по аргументам и выпукла по u, где t - скаляр,. u - вектор. Далее будем считать, что время принимает дискретный ряд значений $t_1, t_2, .. t_i, ...$ Задача заключается в определении значения управляющей функции $u(t_{i+1})$, используя значения $u(t_j)$, $f(t_j, u(t_j))$, $j \le i$, приближающей целевую функцию в моменты времени $t_j,\ j > i$ к безусловному оптимуму

$$f(t,u) \to \underset{u}{extr}\,.$$

Проблема сходимости алгоритмов безусловной оптимизации для нестационарных задач рассматривалась в работах [3, 4]. В этих работах предполагалось точное знание градиента целевой функции, что при различных условиях на функцию $f(t,u)$ позволило доказать сходимость итерационного процесса

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) - \gamma_k \quad \nabla_u f(t_k, u(t_k))\,.$$

Частный случай экстремального регулятора описан в работе [5] для конкретной линейной системы с нелинейной целевой функцией. Величина шага здесь выбиралась постоянной, а знак – обратно знаку производной. В этой публикации также предполагалась возможность точного вычисления значений производных целевой функции. Предлагаемый ниже алгоритм этого не требует.

2 Основные результаты

Пусть функция $f(t,u)$ имеет непрерывные частные производные 1-го порядка по u. Обозначим k-ю компоненту вектора $u^k{}_i = u^k(t_i)$, $f_i = f(t_i, u_i)$, $i = 1,2,...$ Приближения частных производных первого порядка для данных по двум точкам имеют вид

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{u^k{}_i - u^k{}_{i-1}} = \frac{\Delta f}{\Delta u^k} \cong \left.\frac{\partial f}{\partial u^k}\right|_i, i = 1,2,...$$

или в векторной форме

$$\overline{\nabla}_u f_i \cong \nabla_u f_i$$

Утверждение 1. Пусть функция $f(t,u)$ непрерывно дифференцируема по аргументам, известны ее значения на дискретном наборе значений t_i с шагом Δt и при каждом t_i существует точка стационарности функции по аргументу u .

Найдется величина $\overline{h}_i > 0$, что при коэффициенте $h_i \geq \overline{h}_i$ метод расчета

$$u_{i+1} = u_i + h_i \Delta t \overline{\nabla}_u f_i / \left(\left\|\overline{\nabla}_u f_i\right\| + \alpha_i\right)$$

при

$$0 \leq \alpha_i < \left\|\overline{\nabla}_u f_i\right\| \left(h_i \left\|\overline{\nabla}_u f_i\right\| / \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_i} - 1 \right)$$

реализует последовательность значений u_i, отклоняющихся от точек стационарности поочередно в противоположных направлениях.

Доказательство Утверждения 1. Используя линейный отрезок ряда Тейлора–Лагранжа где остаточный член задан в промежуточной точке, получим точное выражение для конечно-разностной оценки производной

$$\frac{f(t_{i+1}, u^k{}_{i+1}) - f(t_i, u^k{}_i)}{u^k{}_{i+1} - u^k{}_i} - \left.\frac{\partial f}{\partial u^k}\right|_{t_i, \tilde{u}^k} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\hat{t}, u^k{}_i} \frac{t_{i+1} - t_i}{u^k{}_{i+1} - u^k{}_i}, \quad t_i \leq \hat{t} \leq t_{i+1};\ \tilde{u}^k \in \left[u^k{}_i, u^k{}_{i+1}\right].$$

По необходимому условию оптимальности положим

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u^k}\right|_{t_i, \tilde{u}^k} = 0.$$

Тогда

$$u^k{}_{i+1} - u^k{}_i = (t_{i+1} - t_i) \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\hat{t}, \hat{u}^k} / \frac{f(t_{i+1}, u^k{}_{i+1}) - f(t_i, u^k{}_i)}{u^k{}_{i+1} - u^k{}_i}.$$

Все значения рассматриваемых величин далее будем относить к моменту t_i. Тогда

$$\Delta u = \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \left[\frac{1}{\overline{\nabla}_u f} \right],$$

где $\left[\frac{1}{\overline{\nabla}_u f} \right]$ – вектор с компонентами $1/\frac{\Delta f}{\Delta u^k}$. Приведем метод вычисления, пригодный для численной реализации. Положим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = h\left(\overline{\nabla}_u f\right)^2 / \left(\left\|\overline{\nabla}_u f\right\| + \alpha\right),$$

тогда

$$\Delta u = h \Delta t \overline{\nabla}_u f / \left(\left\|\overline{\nabla}_u f\right\| + \alpha\right).$$

Обозначим

$$\overline{\alpha} = \left\|\overline{\nabla}_u f\right\| \left(h \left\|\overline{\nabla}_u f\right\| / \frac{\partial f}{\partial t} - 1 \right).$$

Пусть

$$\left(\left\|\overline{\nabla}_u f\right\| / \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ti} \geq \frac{1}{h} \quad \text{и} \quad \overline{\alpha} \geq \alpha \geq 0.$$

Тогда, полагая в методе расчета управления $\overline{\alpha} > \alpha = \text{const} > 0$, на следующем шаге знак оценок $\frac{\Delta f}{\Delta u^k}$ сменится на противоположный. Таким образом, результат u_i колеблется вокруг точек стационарности $\overline{\nabla}_u f\Big|_{\overline{u}_i} = 0$. Чем больше разность $\overline{\alpha} - \alpha$, тем больше размах колебаний $u_i - \overline{u}_i$.

Утверждение 2. Пусть в дополнение к условиям Утверждения 1 и существуют вторые производные функции по аргументу u, которые образуют матрицу $\nabla_{uu} f$.

При коэффициенте

$$h_i \geq \left|\frac{\partial f}{\partial t} / \left\|\nabla_{uu} f\right\| / \Delta t\right|_{ti}^{\frac{1}{2}}$$

и при

$$0 \leq \alpha_i < \left\|\overline{\nabla}_u f_i\right\| \left(h_i \left\|\overline{\nabla}_u f_i\right\| / \frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{ti} - 1\right)$$

метод расчета

$$u_{i+1} = u_i + h_i \Delta t \overline{\nabla}_u f_i / \left(\left\|\overline{\nabla}_u f_i\right\| + \alpha_i\right)$$

реализует последовательность значений u_i, отклоняющихся от точек стационарности поочередно в противоположных направлениях на величину $\overline{\Delta u_i}$, нижняя граница нормы которой

$$\inf \left\|\overline{\Delta u_i}\right\| = h_i \Delta t$$

достигается при

$$h_i = \left|\frac{\partial f}{\partial t} / \left\|\nabla_{uu} f\right\| / \Delta t\right|_{tii}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство Утверждения 2.Обозначим $\overline{\Delta u}$ погрешность метода, обусловленную дискретностью шкалы времени. Оценка производной вблизи точки стационарности имеет вид

$$\overline{\nabla}_u f = \nabla_{uu} f \, \overline{\Delta u}$$

С другой стороны

$$\left[\frac{1}{\overline{\Delta u}}\right] = 1 / \left|\Delta t \frac{\partial f}{\partial t}\right| \overline{\nabla}_u f = 1 / \left|\Delta t \frac{\partial f}{\partial t}\right| \left(\nabla_{uu} f \, \overline{\Delta u}\right)$$

Тогда

$$\left\|\overline{\Delta u}\right\| = \left|\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} / \left\|\nabla_{uu} f\right\|\right|^{\frac{1}{2}}$$

Если $\left\|\Delta u\right\| \geq \left\|\overline{\Delta u}\right\|$, то $\left\|\overline{\nabla}_u f\right\| \geq \left\|\nabla_{uu} f\right\| \left\|\overline{\Delta u}\right\|$ и условие положительности α имеет вид

$$\left(\left\|\nabla_{uu} f\right\| \left\|\overline{\Delta u}\right\| / \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ti} \geq \frac{1}{h}$$

или

$$h \geq \left|\frac{\partial f}{\partial t} / \left\|\nabla_{uu} f\right\| / \Delta t\right|_{ti}^{\frac{1}{2}}.$$

Это условие позволяет определить величину коэффициента h.

Оценим размах колебаний $\overline{\overline{\Delta u}}$ при

$$h = \left| \frac{\partial f}{\partial t} / \| \nabla u u f \| / \Delta t \right|_{ti}^{\frac{1}{2}}.$$

Имеем

$$\left\| \overline{\overline{\Delta u}} \right\| \leq h \Delta t = \left| \frac{\partial f}{\partial t} / \| \nabla u u f \| \Delta t \right|_{ti}^{\frac{1}{2}} = \left\| \overline{\Delta u} \right\|.$$

Таким образом, $\overline{\Delta u}$ является достижимой нижней границей ошибки решения.

Замечание 1. Если задана допустимая погрешность решения δ, то допустимый класс функций $f(t,u)$, для которых $\|\Delta ui\| \leq \delta$, должен удовлетворять условию

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} / \| \nabla u u f \| \Delta t \right| \leq \delta^2$$

на всей области определения.

Замечание 2. Допустимую величину параметров α_i и h_i можно выбирать в достаточно широком диапазоне, не имея точных оценок величин $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i$, $\|\nabla u u f i\|$. Чем ближе значение параметра α_i к значению 0, тем разброс $\overline{\Delta u_i}$ будет больше. Уменьшение параметра h_i уменьшает разброс $\overline{\Delta u_i}$, но при слишком малом h_i алгоритм расходится (разброс решений на шаге $\left\|\overline{\Delta u_i}\right\| > h_i \Delta t$ и суммарная погрешность нарастает в процессе итераций).

Замечание 3. Поскольку влияние внешних факторов на целевую функцию отражается в величине производной $\frac{\partial f}{\partial t}$, то разброс значений управления прямо зависит от величины этого воздействия.

Замечание 4. Если значение функции $f(t,u)$ с ростом t изменяется, как и значение производной $\left.\nabla u f\right|_{u_i}$ вблизи точек стационарности, при задании коэффициента α_i можно положить:

$$\alpha_i = \beta |f_i|, \text{ где } 0 < \beta = \text{const} \leq \|\nabla u f 0\| \left(h 0 \|\nabla u f 0\| / \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_0 - 1 \right) / |f 0|.$$

3 Пример расчета для однопродуктовой модели хозяйственного процесса с автономным управлением. Согласование разноплановых механизмов автономного управления

Рассматриваются условия устойчивого роста для управляемых экономических систем с разноплановыми механизмами автономного управления.

Типичная проблема для рассматриваемых систем заключается в том, что существующие механизмы автономного управления характеризуются планами с преимущественно коротким горизонтом. Они ориентированы на достижение краткосрочного результата – максимума экономической отдачи от текущей хозяйственной деятельности. Тем процессам, которые будут происходить в относительно отдаленном будущем, не уделяется должного внимания. Так, инвестиционные проекты с периодом окупаемости более 1 – 2-х лет часто отвергаются. Основные фонды эксплуатируются за пределами сроков амортизации и не обновляются. В долгосрочном плане эффективность такой хозяйственной деятельности оказывается существенно ниже потенциально возможного уровня. С другой стороны, чрезмерное увлечение долгосрочными планами, необоснованным расширением масштабов хозяйственной деятельности отвлекает средства от непосредственного производства, что чревато банкротствами, сжатием и даже прекращением производства.

Реализация производственного потенциала экономической системы возможна при условии согласованного функционирования разноплановых механизмов автономного управления.

Сказанное выше может быть проиллюстрировано с помощью анализа однопродуктовой модели хозяйственного процесса в дискретном времени.

Пусть выпуск $v(t)$ определяется прямыми затратами z, материалоемкостью a и мощностью основных фондов w:

$$v(t) = \min(z(t-1)/a, w(t))'$$

Прямые затраты в свою очередь определяются как потребностью в обеспечении расширенного производства с коэффициентом роста x, так и наличием свободных средств

$$z(t) = \min(v(t)(a + x(t)), \max(v(t) - c - u(t), 0))'$$

где c - конечное потребление, u - затраты на фондообразование. Динамика фондов в дискретном времени имеет вид:

$$w(t) = w(t-1) + u(t-1) \cdot b - w(t-1) \cdot d'$$

где b - коэффициент фондоотдачи, d - коэффициент выбытия. Будем считать добавленную стоимость

$$f = v - z$$

целевой функцией хозяйственного процесса.

Краткосрочный механизм автономного управления описывается критерием $\max\limits_x f$,

который в динамике реализуется включением контура экстремальной обратной связи с нелинейным интегрирующим звеном:

$$(1) \qquad x(t) = x(t-1) + m \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dz}} / (|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dz}}| + \delta),$$

где m - коэффициент обратной связи, δ - настраиваемый параметр нелинейности, оценка производной

$$\mathrm{d}f/\mathrm{dz} \cong (f(t) - f(t-1))/(z(t) - z(t-1))'$$

Долгосрочный механизм автономного управления описывается критерием $\max\limits_u f$,

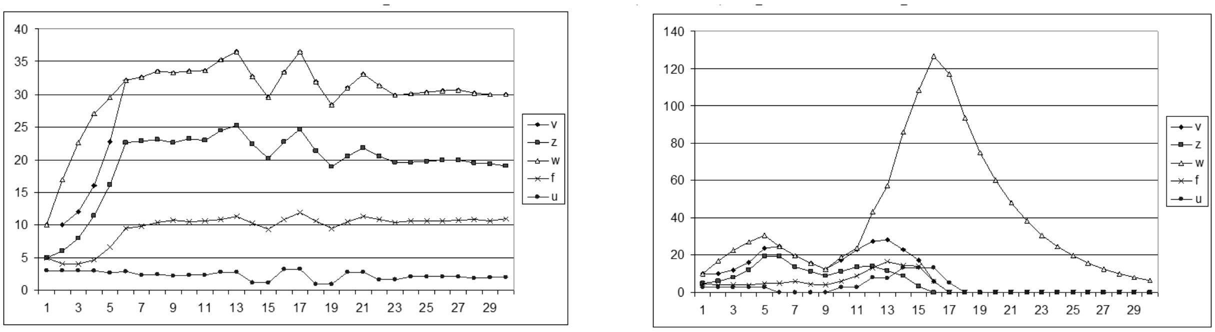
который в динамике реализуется включением контура оптимизирующей обратной связи с линейным интегрирующим звеном:

$$(2) \qquad u(t) = \max(\min(u + k \cdot \mathrm{d}f/\mathrm{d}u, v\text{-}z\text{-}c, 0),$$

где k - коэффициент обратной связи, оценка производной

$$\mathrm{d}f/\mathrm{d}u = (f(t) - f(t-1))/(u(t) - u(t-1))'$$

Имитация динамики экономической системы с краткосрочным механизмом (k =0) и динамики экономической системы с долгосрочным механизмом ($m = 0$) приведена на рис. 2.



A B

Рис. 2.

A. Динамика экономической системы с краткосрочным механизмом автономного управления.

B. Динамика экономической системы с долгосрочным механизмом автономного управления

Быстрое прекращение роста объясняется тем, что увеличение прямых затрат не оставляет средств на наращивание основных фондов. На начальном этапе ситуация развивается также, как в предыдущем случае. Однако стремление наращивать добавленную стоимость за счет увеличения мощностей резко уменьшает прямые затраты. Имитация динамики экономической системы с двумя согласованными механизмами автономного управления приведена на рис. 3.

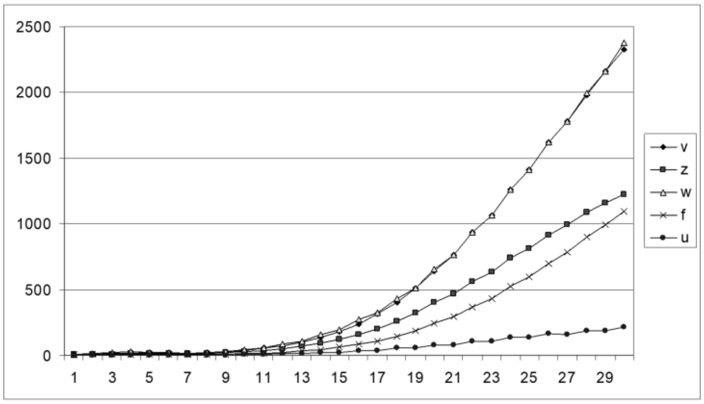


Рис. 3. Динамика экономической системы с согласованными механизмами автономного управления

В этом случае кривая мощностей на небольшую величину превышает кривую выпусков. Затраты на фондооразование и прямые затраты сбалансированы, что обеспечивает режим устойчивого роста. Существенно, что согласованный рост экономики в рассматриваемой модели обусловлен лишь одновременным действием пары звеньев автономного управления (1), (2). Эти звенья не используют соотношений модели, носят универсальный характер и могут быть реализованы в механизмах автономного управления на практике.

Заключение

Рассматриваемый метод учитывает возможность подстройки параметров регулятора в процессе счета. Кроме того, он мало критичен к выбору этих параметров. Последние можно определять исходя из условий применения метода в конкретной ситуации, вытекающей из условий прикладной задачи. Так, в приведенном выше примере величина параметра h соответствует разумному ограничению на темп прироста выпуска продукции. Параметр α тогда может выбираться в соответствии с оценкой

$$\alpha \cong \left\| \overline{\nabla} u f\, 0 \right\|^2 h / \max_t \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|.$$

Численные эксперименты показали, что варьирование параметров регулятора в достаточно широком диапазоне не оказывает существенного влияния на качественное поведение расчетной траектории. Поскольку значения целевой функции вычисляются (или измеряются) только в узлах дискретной сетки времени и для соответствующих значений векторов управления, можно построить сплайн-приближение этой функции нужной гладкости и уже для нее применять точные методы градиентного спуска [3, 4, 5]. Однако точность полученного результата останется конечной, поскольку такая сплайн-аппроксимация не единственна. К тому же вычислительная сложность этого метода будет значительно превышать сложность предложенного подхода.

Литература

1. *Налимов В.В.* Методологические проблемы кибернетики: В 2–х т. – М: МГУ, 1970. Т. 1. – 350 с.; Т. 2. – 389 с.
2. *Гусев В.Б.* Модели автономного управления в развивающихся системах. // Проблемы управления. №6, 2018. С 2–17.
3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983 -384 с.
4. *Попков А.Ю.* Градиентные методы для нестационарных задач безусловной оптимизации // Автоматика и телемеханика. №5, 2005. С. 38-46.
5. *Егоров А.И.* Основы теории управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 504 с.