DOI:

УПРАВЛЕНИЕ РИСКОМ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ФОНДОВОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Горелик В.А.,
ВЦ ФИЦ ИУ РАН, МПГУ, Россия, г. Москва, ул. Вавилова д.40
gorelik@ccas.ru,
Золотова Т.В.
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Россия, г. Москва, Ленинградский пр. д.49
tgold11@mail.ru

Аннотация: Рассматривается игра с природой с известными вероятностями состояний как модель принятия решений в стохастических задачах фондового инвестирования. В качестве оценки эффективности принимается математическое ожидание выигрыша инвестора. В качестве оценки риска используется среднеквадратическое отклонение. Возникающая двухкритериальная задача формализуется с использованием метода перевода одного критерия в ограничение. Рассматривается случай чистых стратегий (выбор одного варианта инвестиций) и случай смешанных стратегий (диверсификация вложения средств). Для случая смешанных стратегий возникает либо задача максимизации линейной функции с одним линейным и одним квадратичным ограничениями, либо задача минимизации квадратичной функции с двумя линейными ограничениями. Для обеих задач получены аналитические методы решения, основанные на условиях оптимальности Каруша-Куна-Таккера. Приведены практические примеры применения указанных методов с использованием реальных статистических данных.

Ключевые слова: управление риском, принцип оптимальности, двухкритериальный подход, математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение

Введение

В реальных процессах принятия решений в сложных системах лицо принимающее решение (ЛПР) действует в условиях неполной информации относительно будущего состояния системы и, следовательно, результатов своей деятельности [1]. Математическая модель подобных ситуаций иногда называется «игрой с природой», а учет неопределенности и нейтрализация связанных с ней потерь при выборе решения называется управлением риском. При этом в зависимости от имеющейся у ЛПР информации о состояниях природы и его отношения к риску необходимо определить принцип оптимальности, т.е. отображение множества всех стратегий в некоторое его подмножество [2]. Случай вероятностной неопределенности, когда имеется информация о вероятностях состояния природы, будем называть принятием решений в стохастических условиях.

В статье [3] излагался двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности при принятии решений в стохастических условиях. В качестве оценки эффективности использовалось математическое ожидание выигрыша, а в качестве оценки риска - функция VAR. Эта функция определяется как вероятность события, при котором выигрыш ЛПР не больше некоторого порогового значения, выступающего в качестве аргумента. Поэтому ее можно считать оценкой риска в краткосрочной перспективе. В данной работе мы будем использовать среднеквадратическое отклонение (СКО), которое можно считать оценкой риска в среднесрочной и долгосрочной перспективе.

Рассматривается ситуация, когда ЛПР может выбирать одну из стратегий (альтернатив) $i=1,...,n$, при известном наборе возможных вариантов состояний внешней среды (природы) $j=1,...,m$. Выигрыш от i-го решения при j-м состоянии внешней среды есть a_{ij}. В частности, в задачах фондового инвестирования, которые будут рассматриваться в качестве приложений, это могут быть доходности финансовых инструментов при различных сценариях развития. Матрица выигрышей от реализации возможных решений есть $A=\| a_{ij} \|$. Вероятности состояний природы q_j будем считать известными. ЛПР необходимо выбрать ту стратегию, которая приведет по возможности к большему выигрышу, но при этом возможные потери вследствие неоднозначности исхода из-за неполноты информации будут как можно меньше. Эти критерии, как правило, противоречивы, т.е. чем более эффективен способ инвестиций, тем он более рискован. Поэтому выбор принципа оптимальности основан на некотором компромиссе между ними.

1 Принцип оптимальности «максимизация эффективности с ограничением по риску»

Итак, в качестве оценки эффективности стратегии i примем математическое ожидание выигрыша $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$. а в качестве оценки риска - СКО $\sigma_i = (\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \bar{a}_i)^2 q_j)^{0.5}$.

Рассмотрим постановку задачи двухкритериальной оптимизации, в которой один из критериев переведен в ограничение.

Если в ограничении – функция СКО с верхним пороговым значением σ_0, то в чистых стратегиях получаем задачу

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \to \max_{i \in I}, \quad I = \{i \mid \sigma_i \le \sigma_0\}.$$

Смешанная стратегия в задаче инвестирования может интерпретироваться как распределение средств в разные финансовые инструменты. При этом случайные доходности от вложения в эти инструменты могут быть, вообще говоря, коррелированны. В данной работе мы будем предполагать, что такая коррелированность отсутствует или ею можно пренебречь. Заметим, что полученные далее результаты могут быть обобщены на случай учета коррелированности случайных доходностей при некоторых достаточно естественных предположениях.

Обозначим через p_i долю средств, вкладываемых в i-й финансовый инструмент. Величины a_{ij} будем интерпретировать как доходности финансовых инструментов при соответствующих состояниях природы (экономических ситуациях). Тогда математическое ожидание доходности стратегии $p=(p_1,\dots,p_n)$ есть $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i$, а СКО случайной величины доходности в случае отсутствия коррелированности определяется, очевидно, по формуле $\sigma = (\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2)^{0.5}$.

Итак, постановка задачи на максимум математического ожидания доходности при ограничении сверху на СКО имеет вид

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i \to \max_{p \in S_1}, \quad S_1 = \{p \mid (\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2)^{0.5} \le \sigma_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ p_i \ge 0, \ i = 1,\dots,n\}.$$

В дальнейшем будем считать, что все $\bar{a}_i$ различны. Это не нарушает общности рассмотрения, так как если две стратегии имеют одинаковые математические ожидания доходности, то в случае равенства и СКО они в рамках данного подхода эквивалентны и одну из них можно исключить, а в случае когда одна из них имеет большее СКО, то в рамках данного подхода она не может входить в оптимальную стратегию с не нулевым весом. Следующая теорема обосновывает метод нахождения оптимальных истинно смешанных (содержащих не менее двух ненулевых компонент) стратегий.

Теорема 1. Если $\sigma_0 > \min_{1 \le i \le n} \sigma_i$ и все $\bar{a}_i$ различны, то задача (2) имеет решение и истинно смешанная оптимальная стратегия может быть представлена в виде $p_i^0 = \dfrac{\bar{a}_i + \mu^0}{\lambda^0 \sigma_i^2}$, $i \in I_0$, $p_i^0 = 0$, $i \notin I_0$, где I_0 – некоторое подмножество множества индексов $I=\{1,\dots,n\}$, $\lambda^0 = \sqrt{\dfrac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$, $\mu^0 = -\dfrac{k_2}{k_3} + \dfrac{1}{k_3}\sqrt{\dfrac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$, $k_1 = \sum_{i \in I_0} \dfrac{\bar{a}_i^2}{\sigma_i^2}$, $k_2 = \sum_{i \in I_0} \dfrac{\bar{a}_i}{\sigma_i^2}$, $k_3 = \sum_{i \in I_0} \dfrac{1}{\sigma_i^2}$.

Доказательство. При $\sigma_0 \ge \min_{1 \le i \le n} \sigma_i$ множество S_1 не пусто, замкнуто и ограничено, поэтому задача (2) имеет решение. В задаче выпуклого программирования (2) для применения условий оптимальности Каруша-Куна-Таккера (ККТ) удобнее первое ограничение возвести в квадрат. Тогда функция Лагранжа имеет вид $L_1(p,\lambda,\mu) = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i + \frac{1}{2}\lambda(\sigma_0^2 - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2) + \mu(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1)$, $\lambda \ge 0$.

Введем множество индексов I_0, соответствующих ненулевым p_i. Условия оптимальности примут вид $\bar{a}_i - \lambda \sigma_i^2 p_i + \mu = 0$, $i \in I_0$, $\bar{a}_i - \lambda \sigma_i^2 p_i + \mu \le 0$, $i \notin I_0$. Если $\lambda=0$, то имеем $\bar{a}_i + \mu = 0 \ \ \forall i \in I_0$. Но в силу предположения теоремы о том, что все $\bar{a}_i$ различны это равенство возможно только для одного индекса, т.е. в данном случае условия оптимальности могут выполняться только для множества I_0, содержащего один индекс. Если квадратичное ограничение в задаче (2) не является активным, то λ=0. Поэтому для истинно смешанной оптимальной стратегии, у которой хотя бы две компоненты отличны от нуля, квадратичное ограничение должно быть активным и $\lambda > 0$. Тогда имеем $p_i = \dfrac{\bar{a}_i + \mu}{\lambda \sigma_i^2}$, $i \in I_0$. Из второго ограничения задачи (2) имеем $\sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\bar{a}_i + \mu}{\lambda \sigma_i^2} = 1$, откуда $\lambda = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\bar{a}_i + \mu}{\sigma_i^2}$. Так как в силу сделанного замечания первое ограничение в задаче (2) является активным, то имеет место также равенство $\sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{(\bar{a}_i + \mu)^2}{\lambda^2 \sigma_i^2} = \sigma_0^2$, откуда $\lambda^2 = \sigma_0^{-2} \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{(\bar{a}_i + \mu)^2}{\sigma_i^2}$ и $(\sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\bar{a}_i + \mu}{\sigma_i^2})^2 = \sigma_0^{-2} \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{(\bar{a}_i + \mu)^2}{\sigma_i^2}$.

Введем обозначения $k_1 = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\bar{a}_i^2}{\sigma_i^2}$, $k_2 = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{\bar{a}_i}{\sigma_i^2}$, $k_3 = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{1}{\sigma_i^2}$, тогда $\lambda = k_2 + k_3 \mu$ и $\sigma_0^2 \lambda^2 = k_1 + 2k_2 \mu + k_3 \mu^2$. Получаем квадратное уравнение для определения μ: $\mu^2 + 2\mu \dfrac{k_2}{k_3} + \dfrac{k_1 - \sigma_0^2 k_2^2}{k_3(1 - \sigma_0^2 k_3)} = 0$. Корни этого уравнения есть $\mu_{1,2} = -\dfrac{k_2}{k_3} \pm \dfrac{1}{k_3} \sqrt{\dfrac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$.

Покажем, что выражение, стоящее под знаком радикала, положительное. Для того, чтобы показать, что числитель $k_1 k_3 - k_2^2$ этого выражения неотрицателен, воспользуемся неравенством Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \le \| x \|^2 \cdot \| y \|^2$. Введем вектора x и y с компонентами $x_i = \dfrac{\bar{a}_i}{\sigma_i}$, $y_i = \dfrac{1}{\sigma_i}$, $i \in I_0$. Тогда $\| x \|^2 = k_1$, $\| y \|^2 = k_3$, $\langle x, y \rangle = k_2$ и $k_1 k_3 - k_2^2 \ge 0$. На самом деле в неравенстве Коши-Буняковского имеет место равенство только в случае коллинеарности векторов x и y. В силу предположения теоремы все $\bar{a}_i$ различны и векторы с компонентами $x_i = \dfrac{\bar{a}_i}{\sigma_i}$ и $y_i = \dfrac{1}{\sigma_i}$ не являются коллинеарными. Поэтому при наличии не менее двух компонент у этих векторов числитель положителен.

Для доказательства положительности знаменателя воспользуемся условием теоремы $\sigma_0 > \min\limits_{1 \le i \le n} \sigma_i$. Так как $k_3 = \sum\limits_{i \in I_0} \dfrac{1}{\sigma_i^2} \ge \dfrac{1}{\min\limits_{1 \le i \le n} \sigma_i^2} > \dfrac{1}{\sigma_0^2}$, то $\sigma_0^2 k_3 - 1 > 0$.

Так как $\lambda = k_2 + k_3 \mu > 0$ и $k_3 > 0$, то $\mu > -\dfrac{k_2}{k_3}$, т.е. является корнем квадратного уравнения со знаком плюс перед радикалом. В результате имеем следующие формулы для нахождения решения задачи (2): $\mu^0 = -\dfrac{k_2}{k_3} + \dfrac{1}{k_3} \sqrt{\dfrac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$, $\lambda^0 = \sqrt{\dfrac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}}$, $p_i^0 = \dfrac{\bar{a}_i + \mu^0}{\lambda^0 \sigma_i^2}$, $i \in I_0$, $p_i^0 = 0$, $i \notin I_0$, что и требовалось доказать.

Алгоритм нахождения решения задачи (2) включает перебор множеств ненулевых компонент I_0. Так как для задачи выпуклого программирования (2) условия оптимальности ККТ являются и достаточными, то если появляется удовлетворяющее им решение (с учетом условия неположительности производных в нуле, которое имеет вид $\bar{a}_i + \mu^0 \le 0$, $i \notin I_0$, а также условий $p_i^0 \ge 0$, $i \in I_0$), оно оптимально. В общем случае мы имеем дело с NP сложной задачей. Однако для в реальных задачах инвестирования число стратегий (видов финансовых инструментов) редко превышает 8-10 и решение находится весьма быстро. Перебор имеет смысл начинать с множества всех индексов $I=\{1,\ldots,n\}$, затем отбрасывать по одному и т.д., что позволяет построить дерево с вершинами, соответствующими различным I_0, и использовать метод ветвей и границ.

2 Принцип оптимальности «минимизация риска с ограничением по эффективности»

Если в ограничении – математическое ожидание с нижним пороговым значением a_0, то в чистых стратегиях получаем задачу

$$(3)\qquad \sigma_i \to \min_{i\in I}, \quad I = \{i \mid \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \ge a_0\}.$$

Постановка задачи на минимум СКО при ограничении снизу на математическое ожидание доходности в смешанных стратегиях имеет вид

$$(4)\qquad (\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2)^{0.5} \to \min_{p\in S_2}, \quad S_2 = \{p \mid \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i \ge a_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,\dots,n\}.$$

Теорема 2. Если $a_0 \le \max_{1\le i\le n} \bar{a}_i$ и все $\bar{a}_i$ различны то задача (4) имеет решение, а оптимальная истинно смешанная стратегия может быть представлена в виде $p_i^0 = \dfrac{\lambda^0 \bar{a}_i + \mu^0}{\sigma_i^2}$, $i\in I_0$, $p_i^0 = 0$, $i\notin I_0$, где I_0 – некоторое подмножество множества индексов I, $\lambda^0 = \dfrac{k_3 a_0 - k_2}{k_1 k_3 - k_2^2}$, $\mu^0 = \dfrac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2}$, если $k_3 a_0 - k_2 > 0$, $\lambda^0 = 0$, $\mu^0 = \dfrac{1}{k_3}$ в противном случае.

Доказательство. При $a_0 \le \max_{1\le i\le n} \bar{a}_i$ множество S_2 непусто, замкнуто и ограничено, поэтому задача (4) имеет решение. Так как при возведении в квадрат целевой функции решение не меняется, то функцию Лагранжа для задачи (4) можно представить в виде $L_2(p,\lambda,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2 + \lambda(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i) - \mu(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1)$, $\lambda \ge 0$.

Для ненулевых компонент p_i условия оптимальности имеют вид $\sigma_i^2 p_i - \lambda \bar{a}_i - \mu = 0$, $i\in I_0$. Отсюда $p_i = \dfrac{\lambda \bar{a}_i + \mu}{\sigma_i^2}$. Если первое ограничение в задаче (4) является существенным (активным на оптимальном решении), то имеем два линейных уравнения $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i = a_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подставляя выражение для p_i в эти уравнения, получаем в принятых ранее обозначениях систему уравнений для нахождения λ и μ: $\lambda k_1 + \mu k_2 = a_0$, $\lambda k_2 + \mu k_3 = 1$. По условию теоремы все $\bar{a}_i$ различны, поэтому как показано в доказательстве теоремы 1 $k_1 k_3 - k_2^2 > 0$ $\forall I_0$, содержащего хотя бы два индекса. Поэтому определитель этой системы строго больше нуля и она имеет решение $\lambda = \dfrac{k_3 a_0 - k_2}{k_1 k_3 - k_2^2}$, $\mu = \dfrac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2}$. При этом в силу условий ККТ должно выполняться $\lambda \ge 0$ (если λ отрицательно, то условия не выполнены и этот случай отбрасывается). Тогда имеем следующие формулы для нахождения решения задачи (4): $\lambda^0 = \dfrac{k_3 a_0 - k_2}{k_1 k_3 - k_2^2}$, $\mu^0 = \dfrac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2}$, $p_i^0 = \dfrac{\lambda^0 \bar{a}_i + \mu^0}{\sigma_i^2}$, $i\in I_0$, $p_i^0 = 0$, $i\notin I_0$. Они справедливы как при $\lambda^0 > 0$, так и при $\lambda^0 = 0$. Последний (вырожденный) случай имеет место при $k_3 a_0 - k_2 = 0$. Тогда $\mu^0 = \dfrac{k_1 - k_2 a_0}{k_1 k_3 - k_2^2} = \dfrac{k_1 k_3 - k_2^2}{(k_1 k_3 - k_2^2) k_3} = \dfrac{1}{k_3}$. Если же первое ограничение в задаче (4) не является активным, то $\lambda^0 = 0$, а $\mu^0 = \dfrac{1}{k_3}$ из второго уравнения. В любом случае при $\lambda^0 = 0$ имеют место формулы $p_i^0 = \dfrac{\mu^0}{\sigma_i^2} = \dfrac{1}{k_3 \sigma_i^2}$. Теорема доказана.

Алгоритм нахождения решения задачи (4) включает перебор множеств ненулевых компонент I_0. Так как для задачи выпуклого программирования (4) условия оптимальности ККТ являются и достаточными, то если появляется удовлетворяющее им решение (с учетом условия неотрицательности производных в нуле, которое имеет вид $\lambda^0 \bar{a}_i + \mu^0 \le 0$, $i \notin I_0$, а также условий $\lambda^0 \ge 0$ и $p_i^0 \ge 0$, $i \in I_0$), оно оптимально.

3 Практический пример для акций российских компаний

Инвесторы, принимая решение на фондовом рынке, прогнозируют будущие цены (или доходности) финансовых инструментов. В свою очередь при прогнозировании будущих доходностей можно использовать фундаментальный или технический анализ. Фундаментальный анализ основан на исследовании закономерностей, которые определяют стратегию в долгосрочной перспективе, а технический анализ предполагает исследование предыдущих значений показателей финансовых инструментов (например, доходностей) для краткосрочных или среднесрочных сделок [4].

Технический анализ предполагает следующую процедуру обработки информации. Если имеются статистические данные для каждого актива, то в матрице выигрышей каждой строке будет соответствовать набор статистических значений доходностей. Состояниями природы здесь являются моменты времени, вероятность каждого состояния есть $1/m$, где m – длина временного ряда (количество моментов времени) для каждого актива. Несмещенная оценка для математического ожидания определяется по формуле $\bar{a}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$, а несмещенная оценка для СКО – по формуле

$$\sigma_i = (\tfrac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} - \bar{a}_i)^2)^{0.5}.$$

Проведем технический анализ и найдем оптимальную стратегию инвестирования, используя реальные данные о котировках акций российских компаний за период с 01.10.2019 по 31.12.2019. Были выбраны три относительно успешные компании, а именно, Яндекс, Сбербанк, МТС. На рис. 1 приведены значения цен закрытия акций всех рассматриваемых компаний за указанный период, экспортированных в файл Excel (данные взяты с сайта Инвестиционной компании «ФИНАМ» [5]). На основании данных о еженедельных ценах закрытия рассчитаны еженедельные значения доходностей компаний, средние значения доходностей, дисперсии и СКО за данный период (рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		YNDX	SBER	MTSS			YNDX	SBER	MTSS
2	<DATE>	<CLOSE>	<CLOSE>	<CLOSE>			доходности акций		
3	20191007	1898	230,31	268			0,018967	0,022752	0,004104
4	20191014	1934	235,55	269,1			0,067218	0,018892	0,035489
5	20191021	2064	240	278,65			0,035853	-0,015	0,027454
6	20191028	2138	236,4	286,3			0,02189	0,015948	0,0489
7	20191104	2184,8	240,17	300,3			0,037624	-0,00071	-0,00033
8	20191111	2267	240	300,2			0,131981	-0,00779	0,016489
9	20191118	2566,2	238,13	305,15			0,049412	-0,01743	-0,00213
10	20191125	2693	233,98	304,5			-0,04553	0,004958	-0,01215
11	20191202	2570,4	235,14	300,8			0,035948	0,025814	0,011968
12	20191209	2662,8	241,21	304,4			0,006459	0,01451	0,030552
13	20191216	2680	244,71	313,7			0,020896	0,030036	0,020083
14	20191223	2736	252,06	320			-0,01864	0,011664	0,006563
15	20191230	2685	255	322,1					
16									
17						мат.ож	0,030173	0,008637	0,015582
18						дисп	0,001926	0,000251	0,000314
19						ско	0,043884	0,01585	0,017722

Рис. 1. Котировки акций компаний Яндекс, Сбербанк, МТС, доходности и статистические характеристики

Стратегия 1 – вложение в акции компании Яндекс, стратегия 2 – вложение в акции компании Сбербанк, стратегия 3 – вложение в акции компании МТС. Средние значения доходностей при этом равны $\bar{a}_1$=0.03017 (3.017%), $\bar{a}_2$=0.00863 (0.863%) и $\bar{a}_3$=0.01558 (1.558%), дисперсии равны $\sigma_1^2 = 0.00193$, $\sigma_2^2 = 0.00025$ и $\sigma_3^2 = 0.00031$. Ковариационные моменты при этом принимают значения порядка 10^{-5}, поэтому ими можно пренебречь.

Пусть в задаче (1) $\sigma_0^2 = 0.001$. Ограничения задачи (1) выполняются для стратегий 2 и 3, и решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании МТС.

Решим задачу (2) в смешанных стратегиях при том же пороговом значении дисперсии $\sigma_0^2 = 0.001$. Для этих данных задача имеет вид

$$0.03017p_1 + 0.00863p_2 + 0.01558p_3 \to \max_p,$$

$$0.00193p_1^2 + 0.00025p_2^2 + 0.00031p_3^2 \le 0.001, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Сначала для сравнения найдем решение этой задачи, используя надстройку «Поиск решения» в Excel. Получаем смешанную стратегию $p^0 = (0.71086, 0, 0.28914)$, т.е. решением является вложение в акции компаний Яндекс и МТС (рис. 2). При этом значение целевой функции 0.25955.

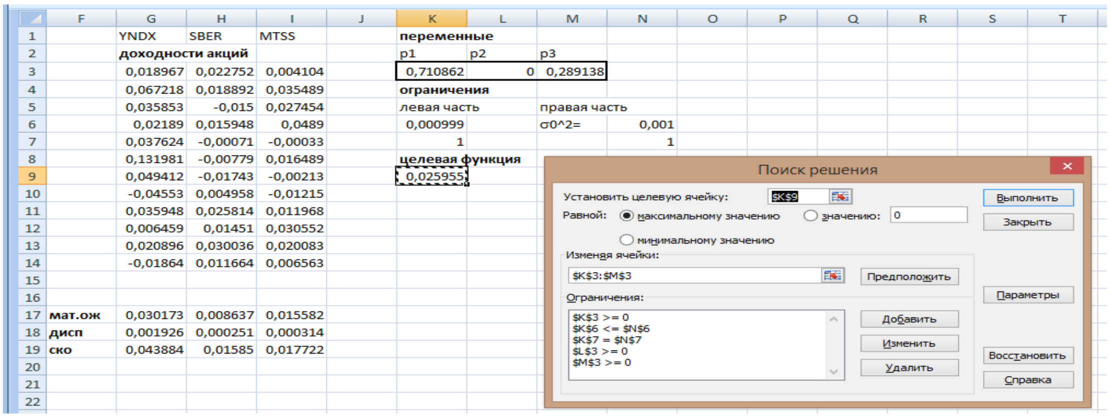

Рис. 2. Решение задачи (2) с помощью надстройки «Поиск решения» в Excel

Произведем теперь расчеты, используя формулы из теоремы 1. Возьмем $I_0=\{1, 2, 3\}$,

тогда $$k_1 = \sum_{i \in I_0} \frac{\bar{a}_i^2}{\sigma_i^2} = \frac{0.03017^2}{0.00193} + \frac{0.00864^2}{0.00025} + \frac{0.01558^2}{0.00031} = 1.54282,$$

$$k_2 = \sum_{i \in I_0} \frac{\bar{a}_i}{\sigma_i^2} = \frac{0.03017}{0.00193} + \frac{0.00864}{0.00025} + \frac{0.01558}{0.00031} = 99.6648,$$

$$k_3 = \sum_{i \in I_0} \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{1}{0.00193} + \frac{1}{0.00025} + \frac{1}{0.00031} = 7684.06,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}} = \sqrt{\frac{1.54282 \cdot 7684.06 - 99.6648^2}{0.001^2 \cdot 7684.06 - 1}} = 16.95761,$$

$$\mu = -\frac{k_2}{k_3} + \frac{1}{k_3}\sqrt{\frac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}} = -\frac{99.6648}{7684.06} + \frac{1}{7684.06}\sqrt{\frac{1.54282 \cdot 7684.06 - 99.6648^2}{0.001^2 \cdot 7684.06 - 1}} = -0.01076,$$

$$p_1 = \frac{\bar{a}_1 + \mu}{\lambda \sigma_1^2} = \frac{0.03017 - 0.01076}{16.95761 \cdot 0.00193} = 0.59435, \quad p_2 = \frac{\bar{a}_2 + \mu}{\lambda \sigma_2^2} = \frac{0.00864 - 0.01076}{16.95761 \cdot 0.00025} = -0.49914,$$

$$p_3 = \frac{\bar{a}_3 + \mu}{\lambda \sigma_3^2} = \frac{0.01558 - 0.01076}{16.95761 \cdot 0.00031} = 0.90479.$$

Условие неотрицательности $p_i^0 \ge 0$, $i \in I_0$, в данном случае не выполняется, значит, стратегия p решением не является. Так как при этом p_2 отрицательное, то можно предположить, что оптимальная смешанная стратегия содержит вторую нулевую компоненту. Поэтому возьмем $I_0=\{1, 3\}$, тогда $k_1 = \sum_{i \in I_0} \frac{\bar{a}_i^2}{\sigma_i^2} = \frac{0.03017^2}{0.00193} + \frac{0.01558^2}{0.00031} = 1.24585$, $k_2 = \sum_{i \in I_0} \frac{\bar{a}_i}{\sigma_i^2} = \frac{0.03017}{0.00193} + \frac{0.01558}{0.00031} = 65.28219$,

$k_3 = \sum_{i \in I_0} \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{1}{0.00193} + \frac{1}{0.00031} = 3703.29168$. В этом случае действительно получаем решение задачи (2): $\lambda^0 = \sqrt{\frac{k_1 k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}} = \sqrt{\frac{1.24585 \cdot 3703.29168 - 65.28219^2}{0.001^2 \cdot 3703.29 - 1}} = 11.41100$,

$$\mu^0 = -\frac{k_2}{k_3} + \frac{1}{k_3}\sqrt{\frac{k_1k_3 - k_2^2}{\sigma_0^2 k_3 - 1}} = -\frac{65.28219}{3703.29} + \frac{1}{3703.29}\sqrt{\frac{1.24585 \cdot 3703.29 - 65.28219^2}{0.001^2 \cdot 3703.29 - 1}} = -0.01455,$$

$$p_1^0 = \frac{\bar{a}_1 + \mu^0}{\lambda^0 \sigma_1^2} = \frac{0.03017 - 0.01455}{11.411 \cdot 0.00193} = 0.71109, \quad p_3^0 = \frac{\bar{a}_3 + \mu^0}{\lambda^0 \sigma_3^2} = \frac{0.01558 - 0.01455}{11.411 \cdot 0.00031} = 0.28891.$$

Условие $\bar{a}_i + \mu^0 \le 0$, $i \notin I_0$ для второй стратегии (вложение в акции компании Сбербанк) выполняется, т.е. $\bar{a}_2 + \mu^0 = 0.00863 - 0.01455 = -0.00592$.

Таким образом, решением является вложение в акции компаний Яндекс и МТС. Заметим, что при расчетах с использованием результатов теоремы 1 ограничение по риску выполняется в точности как равенство, в отличие от результатов вычисления с использованием численного метода Excel. При этом получается и большее значение целевой функции 0.25958, т.е. оптимальное решение находится с большей точностью.

Решим задачу (3) с математическим ожиданием в ограничении, в котором пороговое значение равно a_0=0.02 (2%). Тогда ограничение задачи выполняется для стратегии 1. Поэтому решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании Яндекс.

Решим задачу (4) в смешанных стратегиях при том же пороговом среднем значении доходности равным a_0=0.02. Для этих данных задача имеет вид

$$0.00193p_1^2 + 0.00025p_2^2 + 0.00031p_3^2 \to \min_p,$$

$$0.03017p_1 + 0.00863p_2 + 0.01558p_3 \ge 0.02, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Используя надстройку «Поиск решения» в Excel, получаем оптимальную смешанную стратегию $p^0 = (0.31862, 0.03330, 0.64808)$, т.е. решением является вложение в акции всех трех компаний (рис. 3).

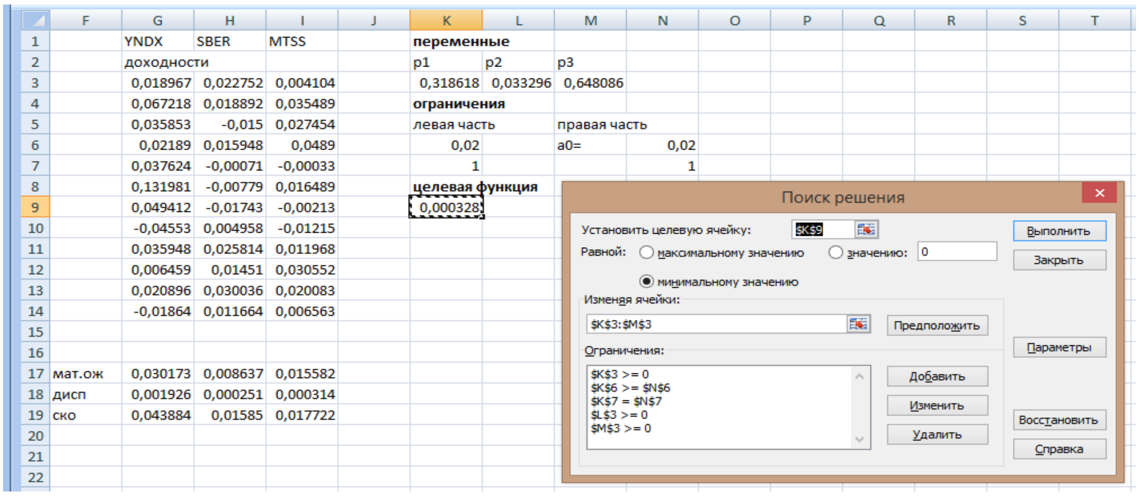

Рис. 3. Решение задачи (4) с помощью надстройки «Поиск решения» в Excel для a_0=0.02

Произведем теперь расчеты, используя формулы из теоремы 2. Возьмем I_0={1, 2, 3}, тогда $k_1 = 1.54282$, $k_2 = 99.6648$, $k_3 = 7684.06$ (значения k_1, k_2, k_3 посчитаны для предыдущей задачи). При этом условие $k_1k_3 - k_2^2 > 0$ выполняется: $1.54282 \cdot 7684.06 - 99.6648^2 = 1922.073$.

Используя формулы теоремы 2, имеем $\lambda^0 = \dfrac{k_3a_0 - k_2}{k_1k_3 - k_2^2} = \dfrac{7684.06 \cdot 0.02 - 99.6648}{1.54282 \cdot 7684.06 - 99.6648^2} = 0.02810$,

$$\mu^0 = \frac{k_1 - k_2a_0}{k_1k_3 - k_2^2} = \frac{1.54282 - 799.6648 \cdot 0.02}{1.54282 \cdot 7684.06 - 99.6648^2} = -0.00023,$$

$$p_1^0 = \frac{\lambda^0 \bar{a}_1 + \mu^0}{\sigma_1^2} = \frac{0.02810 \cdot 0.03017 - 0.00023}{0.00193} = 0.31862,$$

$$p_2^0 = \frac{\lambda^0 \bar{a}_2 + \mu^0}{\sigma_2^2} = \frac{0.02810 \cdot 0.00864 - 0.00023}{0.00025} = 0.03330,$$

$$p_3^0 = \frac{\lambda^0 \bar{a}_3 + \mu^0}{\sigma_3^2} = \frac{0.02810 \cdot 0.01558 - 0.00023}{0.00031} = 0.64808.$$

Таким образом, получили в точности ту же оптимальную смешанную стратегию для задачи (4).

Решим задачу (3) с математическим ожиданием в ограничении, в котором пороговое значение равно a_0=0.01 (1%). Тогда ограничение задачи выполняется для стратегии 1 и 3. Поэтому решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании МТС.

Решим задачу (4) в смешанных стратегиях при том же пороговом среднем значении доходности равным a_0=0.01. Используя надстройку «Поиск решения» в Excel, получаем оптимальную смешанную стратегию $p^0 = (0.06758, 0.51805, 0.41437)$, т.е. решением является вложение в акции всех трех компаний (рис. 4). Однако заметим, что ограничение по доходности в оптимальной точке становится неактивным: 0.01297 > 0.01.

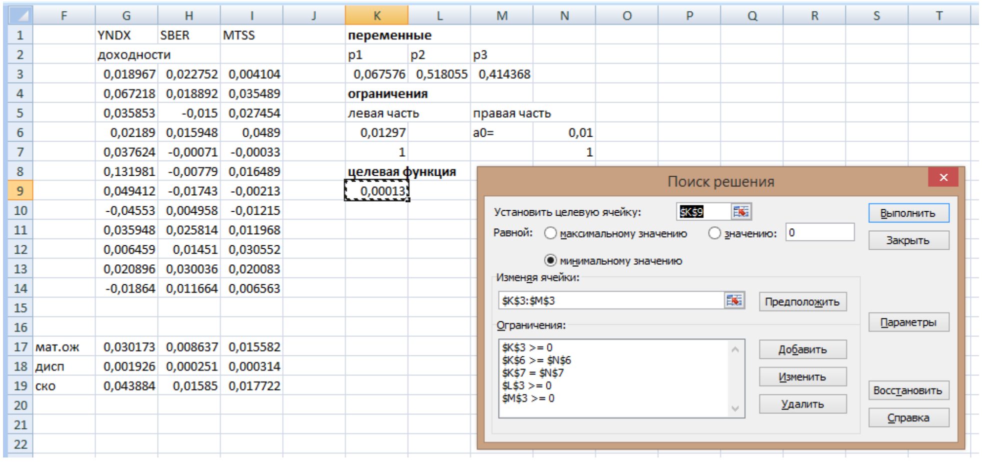

Рис. 4. Решение задачи (4) с помощью надстройки «Поиск решения» в Excel для a_0=0.01

Произведем теперь расчеты, используя формулы из теоремы 2. Формула $\lambda = \dfrac{k_3 a_0 - k_2}{k_1 k_3 - k_2^2}$ дает отрицательное значение для множителя Лагранжа. Для данного случая имеем $\lambda^0 = 0$, $\mu^0 = \dfrac{1}{k_3} = \dfrac{1}{7684.06} = 0.0013$, $p_1^0 = \dfrac{1}{k_3 \sigma_1^2} = \dfrac{1}{7684.06 \cdot 0.00193} = 0.06758$,

$$p_2^0 = \frac{1}{k_3 \sigma_2^2} = \frac{1}{7684.06 \cdot 0.00025} = 0.51805, \quad p_3^0 = \frac{1}{k_3 \sigma_3^2} = \frac{1}{7684.06 \cdot 0.00031} = 0.41437.$$

Таким образом, здесь действительно имеет место второй вариант формул теоремы 2 для нахождения оптимальной стратегии, а найденные двумя методами решения совпали точно.

Заключение

Полученные результаты являются иллюстрацией тезиса, что понятие принципа оптимальности в задачах принятия решений в условиях неполной информации является весьма неоднозначным. ЛПР должен иметь возможность выбирать из спектра моделей принятия решений, отражающих зависимость вида рационального поведения от имеющейся информации и его отношения к риску.

Литература

1. *Vasilyev S. and Tsvirkun A.* Problems of managing the development of large-scale systems in modern conditions, 10th International Conference Management of Large-Scale System Development, Proceedings, IEEE Conference Publications. 2017. – P.1-5.
2. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Общий подход к моделированию процедур управления риском и его применение к стохастическим и иерархическим системам. // Управление большими системами: сборник трудов. 2012. №37. – С. 5-24.
3. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Принцип оптимальности «математическое ожидание – var» и его применение в задачах фондового инвестирования // Управление развитием

крупномасштабных систем: Труды 12 международной конференции.– М.: ИПУ РАН. 2019. – С.148-154.
4. *Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В.* Инвестиции. – М.: ИНФРА-М. 2018. – 1028 с.
5. Инвестиционная компания «ФИНАМ», *https://www.finam.ru/*, период обращения 07.03.20.