DOI:

ТЕОРИЯ СЛОЖНОСТИ В АЛГЕБРО-ЛОГИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Титов А.В.

Российский университет транспорта (МИИТ),

Россия, г. Москва, Москва ул. Образцова д.9

a.v.titov@mail.ru

Аннотация. В докладе рассматривается задача формирования общей базы математического моделирования задач управления сложными системами на основе использования алгебро-логических методов исследования видов формального исчисления. Анализируются проблемы, которые возникают при математическом моделировании процессов принятия решений при моделировании процессов управления объектами большой сложности. Развивается подход к изучению типов логических исчислений основанный на основе использования понятия "оценка" как морфизма из множества формул в структуры, на которых принимает значение оценка. Это позволяет рассматривать множество формул алгебры логики с введенным на нем отношением эквивалентности как фактор-алгебру с определенной структурой. Приводятся результаты моделирования неклаассических формально-логических систем, новые, обобщенные формулировки общепризнанных правил вывода.

Ключевые слова: оценка, сложность, теория, формальный язык, модель, математическая структура, семантика, мера, отношение эквивалентности, решетка, импликативная решетка, логическое исчисление.

Введение

Возрастающие требования к качеству и надежности систем управления вызывают необходимость систематизации методов моделирования сложных систем и процессов, в том числе задач управления сложными системами. Все возрастающая сложность объектов управления приводит к необходимости разработки принципиально новых подходов к моделированию задач управления такими объектами, которые позволили бы не снижать качество моделей в задачах управления. Эти подходы должны быть направлены на развитие и углубление теоретической базы методов моделирования, одновременно способствуя систематизации имеющихся на сегодняшний день разрозненных не всегда взаимосвязанных методов моделирования.

Новые методы должны обеспечить эффективное моделирования сложных объектов управления, описание которых связано как с неполнотой информации об объектах моделирования, так и с ее противоречивостью. При этом сложность становится одной из важнейших характеристик объекта управления и может существенно влиять на эффективность выбранных методов моделирования.

Принцип сложности был разработан в интересах математического синтеза характеристих оптимальных систем управления в работах В.В.Солодовникова, В.Ф.Бирюкова, В.И.Тумаркина [1] и ряда других исследователей.

Моделирование задач управления сложными системами в условиях неполноты и противоречивости информации об объектах моделирования и среды зачастую основывается на использовании эвристичеких подходов, в которых отсутствует строгая непротиворечивая аксиоматика в используемых при этом методах описания решаемых задач. Таким образом возникла потребность в разработке на строго математической основе средств моделирования, позволяющих вводить в рассмотрение противоречия. К таким методам можно отнести, в частности теорию нечетких множеств и нечетких алгоритмов, но на сегодняшний день она не обладает строгой математической базой и скорее относится к области эвристик.

В то же время, методы развиваемые в современной математике позволяют вводить в рассмотрение формально-логические системы свободные от законов противоречия и исключенного третьего и следовательно рассматривать математические структуры, на которых не действуют эти законы. Наиболее известными в этом отношении являются структуры разрабатываемые в рамках интуиционистской или, как ее еще называют, гейтингозначной логики.

В то же время методы развиваемые в нестандартном анализе и понятие оценки как морфизма из множества формул в множество значений истинности сохраняющего структуру, позволяют в рамках обобщенного нестандартного анализа и теории категорий на строго математической основе обосновать возможность неклассических формально-логических систем без законов исключенного третьего и противоречия, а значит и рассматривать структуры, в которых эти законы не носят статуса необходимых.

В докладе приводится описание основных конструкций, позволяющих получать подобные формально-логичекие системы и некоторые следствия, расширяющие наши представления о правилах формального вывода в задачах моделирования сложных объектов.

Подход на основе исследования оценки позволяет рассмотреть различные типы логического исчисления на их единстве на основе исследования семантики.

Достаточно давно была замечена недостаточность логики с двумя значениями истинности, с законами исключенного третьего и противоречия для описания, как законов мышления, так и явлений окружающего мира.

Разделяя формальную и диалектическую логику А.Ф. Лосев замечает: «Что диалектика не есть формальная логика, это известно всем». И далее:«Если диалектика, действительно, не есть формальная логика, тогда она *обязана* быть вне законов тождества и противоречия, т.е. она обязана быть *логикой противоречия*».[3].

Но и в рамках формальной логики, критика классической логики сосредоточена на законах исключенного третьего и противоречия. Результатом стало появление вариантов формальной логики свободной от этих законов, частности, интуиционистской логики и различных вариантов паранепротиворечивой логики.

В частности, в работах Н.А. Васильева на основе принятой им новой системы суждений, включающей три сорта суждений: утвердительное- «А есть В», отрицательное- «А не есть В», индифферентное- «А есть и не есть В» разработана «воображаемая логика» без законов исключенного третьего и противоречия. [4].

Однако выход формальной логики за границы булевой логики и в более широком смысле – аристотелевой логики требует теоретической базы, на которой могли бы быть обоснованы и строиться различные варианты логического исчисления, а также исследоваться отношения между ними.

Мысль о зависимости характера формальной логики от семантики оценки прослеживается как в философских трудах, так и в работах ведущих математиков:

«Принципы классической логики представлены в Set операциями на некотором множестве – двухэлементной булевой алгебре. Каждый топос имеет аналог этой алгебры, и поэтому можно сказать, что каждый топос определяет свое собственное логическое исчисление. Оказывается, что это исчисление может отличаться от классической логики, и вообще логические принципы, имеющие место в топосе, есть принципы интуиционистской логики». [3]

«В центре нашего внимания будет попытка установить связь фактического, или семантического отношения следования…с чисто формальным отношением выводимости,..»[4]

1 Формализация классической логики как булевой алгебры

Связь булевой структуры двухзначной логики с классификацией типов суждений по Аристотелю. Связь силлогизмов классической логики с оценкой на булевой алгебре.

В классической логике, как известно, рассматривается четыре типа суждений: «все А есть В», «ни одно А не есть В», «некоторые А суть В», «некоторые А не суть В». Эта логика оперирует с понятиями. Общее понятие определяется через свойства, которыми обладает предмет, подпадающий под данное понятие. В математической логике свойства предметов есть одноместные предикаты и, следовательно, с точки зрения классической математической логики «понятие» есть одноместный предикат. «Имея предикат F, можно образовать класс:

$$(1)\ M=\{x / F(x)\}$$

всех предметов обладающих свойством F. Этот класс и характеризует объем понятия» [12].

Таким образом, в традиционной логике понятия и предметы разделены, понятие заменяет предметы.

Из приведенной формулы следует, что к понятиям можно подходить как с точки зрения содержания, представляя их одноместными предикатами, так и с точки зрения объема, фиксируя класс предметов, подходящих под данное понятие.

В традиционной математической логике считается, что есть некоторый фиксированный класс предметов, который служит областью, которую «пробегают» переменные в формуле (1). Но в этом случае M есть множество. Следовательно, устанавливается соответствие между классом предикатов (понятий) и семейством множеств. h: $\{F\}\rightarrow\{M\}$.

Таким образом, понятие в классической логике может быть представлено в предикативной или в теоретико-множественной форме через его объем.

И каждый из приведенных выше типов суждений может быть выражен как в предикативной, так и в эквивалентной ей теоретико- множественной форме.

Например. «Все S естьP» или $A(S,P)\equiv \forall x(F(x)\rightarrow G(x)\}\equiv S\subseteq P$.

Пусть S есть объем понятия F, т.е $S=\{x \mid F(x)\}$, аналогично P пусть есть объем понятия G, т.е. $P==\{G \mid G(x)\}$.

Поскольку $F(x)\Leftrightarrow x\in S$, то из суждения «Все S естьP» следует, что если $x\in S$, то $x\in P$ и следовательно, $S\subseteq P$ объем S понятия, выраженного предикатом F. Таким образом, объем S понятия, выраженного предикатом F является подмножеством объема P понятия, выраженного предикатом G, что означает, что для всякого объекта $x \in S$ выполняется как F так и G, т.е.$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)\}$.

Следовательно, мы здесь имеем три эквивалентные формы записи суждений классической логики. Вопрос в нахождении формы общей для обеих приведенных форм.

Аналогично силлогизмы логики Аристотеля могут быть выражены как в логической, так и в эквивалентной ей теоретико- множественной форме.

Например фигура силлогизма

$$A(M,P)$$

$$A(S,M)$$

$$A(S,P)$$

может быть записана в логической форме как

$$\forall x((F(x)\rightarrow G(x))\wedge(E(x)\rightarrow F(x)))\rightarrow\forall x(E(x)\rightarrow G(x)).$$

Эквивалентная теоретико –множественная форма имеет вид:

$$((M\subseteq P)\wedge(S\subseteq M))\rightarrow(S\subseteq P).$$

Обобщение на языке импликативных решеток:

$$(S\Rightarrow M))\square(S\Rightarrow M)\leq S\Rightarrow P.$$

Классическая логика Аристотеля есть логика предикатов, однако формулы выражающие суждения и силлогизмы являются замкнутыми формулами, в теоретико - множественной форме, которая эквивалентна логической эти формулы не содержат переменных. Следовательно, данные формулы могут рассматриваться как формулы пропозициональной логики.

Истинность высказывания «все A есть F» означает, что все элементы класса обладают свойством F, что обусловлено схемой построения данного класса.

Если в исчислении высказываний на множестве всех высказываний $\{A\}$ ввести эквивалентность $\approx$, при которой два высказывания эквивалентны, если обладают одинаковой истинностью, то фактор–множество по отношению выбранной эквивалентности будет двух элементное множество $B=\{0,1\}$. Легко показать, что такая эквивалентность будет конгруэнцией. В силу того, что структура исчисления высказываний есть структура булевой решетки (булевой алгебры), то и фактор-множество $B=\{0,1\}$, есть булева решетка. В силу всего сказанного существует естественный гомоморфизм h: $\{A\}\rightarrow\{A\}/_{\approx}=B$. Таким образом, то, что оценка в исчислении высказываний является гомоморфизмом естественным образом вытекает из эквивалентности понятия его объему.

Развитие многозначных логик шло по пути «модернизации» множества $\{1;0\}$, В частности, в качестве значений истинности стали брать значения из отрезка $[0,1]$. Однако синтаксическая структура, алгебра высказываний, оставалась булевой алгеброй.

2 Логическое исчисление как алгебра формул, ее связь со структурой значений оценки

2.1 Алгебра формул языка нулевого порядка как свободная алгебра в своем классе подобия с системой свободных образующих V_0.

Рассмотрим вопрос о свойствах оценки в формальном исчислении в более общей постановке.

Множество всех формул языка нулевого или первого порядка в классической логике является универсальной алгеброй $<Fm, \cap,\cup, \Rightarrow,-, >$ с тремя бинарными и одной унарной операцией или обобщенной алгеброй $<Fm, \cap,\cup, \Rightarrow,\square,\square-, >$ с обобщенными операциями $\square$, $\square$, соответствующим кванторным приставкам.

Исходная алгебра $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$ не является решеткой, т.к. для формул $f \in Fm$ и $g \in Fm$ $f \cap g \neq g \cap f$. Однако, как мы знаем, исчисление предикатов является булевой алгеброй. Встает вопрос о том в силу чего исходная алгебра формул $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$ «принимает» на себя ту тли иную алгебраическую структуру.

В общей постановке можно поставить вопрос о зависимости логического исчисления как алгебраической структуры от вида оценки.

Рассмотрим это на примере языка нулевого порядка (пропозициональной логики)

Алгебра $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$ формул языка нулевого порядка L_0 является свободной в классе R универсальных алгебр $\langle A, o_1, o_2, o_3, o_4 \rangle$ с тремя бинарными операциями o_1, o_2, o_3, и одной унарной операцией o_4. Множество V_0 всех пропозициональных переменных языка L_0 является системой свободных образующих в Fm.

Общепринятое определение оценки заключается в том, что под оценкой языка L_0 понимается отображение $\upsilon: V_0 \to A$, где A алгебра подобная алгебре $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$, что следует, например из того, что оценка может рассматриваться как подстановка. Если при этом $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$ свободная алгебра с системой образующих V_0, то υ может быть продолжено на Fm до гомоморфизма.

2.2 Классическая логика как алгебра формул с оценкой на булевой алгебре.

Пусть h – гомоморфизм из алгебры Fm в подобную ей алгебру B, определим отношение ~ на алгебре Fm следующим образом: $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow h(a_1)=h(a_2)$, тогда по известной теореме отношение ~ есть конгруэнция, и $Fm|\sim$ изоморфно B.

В традиционном исчислении высказываний истинность формулы $f \in Fm$ есть оценка $\varphi: Fm \to \mathbf{B}$, со значением в двухзначной булевой алгебре. При этом отображение φ гомоморфизм из алгебры Fm в алгебру **B.** Определим на Fm отношение ~. Пусть $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ для любых $a_1 \in Fm$, $a_2 \in Fm$. Если принять, что значение истинности любой формулы зависит лишь от истинности подформул и $f = o(f_1, f_2, \ldots f_n)$, то $\varphi(f) = o(\varphi(f_1), \varphi(f_2,), \ldots, \varphi(f_n))$ и, следовательно, при $f_1 \sim h_1$, $f_2 \sim h_2, \ldots, f_n \sim h_n$, $o(\varphi(f_1), \varphi(f_2,), \ldots, \varphi(f_n)) = o(\varphi(h_1), \varphi(h_2,), \ldots, \varphi(h_n))$, т.е. $o(f_1, f_2, \ldots f_n) \sim o(h_1, h_2,, \ldots, h_n)$ и ~ - конгруэнция на Fm.

Несложно показать, что оценка φ со значением, на булевой алгебре **B** совпадает с естественным гомоморфизмом Fm на $Fm|\sim$. Из этого следует, в частности, что $f \cap g \sim g \cap f$. В общем, же из этого следует, что фактор алгебра $Fm|\sim$, есть булева алгебра изоморфная **B**. Таким образом, структура, которая индуцируется оценкой на алгебре высказываний $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$, определяется изоморфностью алгебр $Fm|\sim$ и **B.** Поскольку эквивалентность ~ конгруэнция, то существует гомоморфизм Fm на $Fm|\sim$. есть то исчисление высказываний, в которое преобразуется алгебра формул $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$. И это преобразование обусловлено выбором алгебры, на которой принимает значение оценка.

Получаем Принцип **1.** Тип логического исчисления определяется типом алгебры, на которой принимает значение оценка формул.

В общем случае алгебра $\langle Fm, o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n \rangle$ формул языка нулевого порядка L_0 является свободной в классе R универсальных алгебр $\langle A, o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n, \rangle$, в которых операции с одинаковыми индексами имеют одинаковую размерность. Множество V_0 всех пропозициональных переменных языка L_0 является системой свободных образующих в Fm.

Оценка языка L_0 есть отображение $\upsilon: Fm\ V_0 \to A$, где A алгебра подобная алгебре $\langle Fm, o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n \rangle$, как и в предыдущем случае, будем рассматривать лишь те случаи, когда отображение υ есть гомоморфизм множества формул в алгебру, элементы, которой служат значениями оценки.

Но наличие такого гомоморфизма означает, что если известна структура алгебры A, на которой принимают значения оценки формул языка L_0, то эта структура сохраняется и на алгебре формул языка L_0 $\langle Fm, o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n \rangle$.

В частности, если значения оценки лежат в булевой алгебре B, то и $\langle Fm, o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n \rangle$ - булева алгебра.

Можно сделать вывод, что традиционное восприятие истинности в формальной логике как значения из множества «истина» «ложь» формализуется наличием «естественного гомоморфизма» гомоморфизмом $\varphi: Fm \to \mathbf{B}$**,** где **B** двухзначная булева алгебра. Анализ содержания суждений на основе перехода к объему понятия обосновывает такое представление, т.к. алгебра подмножеств является булевой алгеброй. При этом в классической логике в семействе ***P***(***K***) всех подмножеств некоторого множества значений истинности могут принимать только значения ***K***=1 и Ø=0. Т.е. суждение истинно, если истинно для всех элементов из ***K***, т.е. объем понятия совпадает с ***K***. Т.о. отображение $\varphi: Fm \to$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K})$ сужается до отображения φ:Fm $\to$ **B,** поскольку все оценки, для которых $\varphi(F) \neq \boldsymbol{K}$, равны 0. Следовательно, определяется эквивалентность формул, при которой F1 ~F2 если, либо $\varphi(F1)=\varphi(F2)$, либо $\varphi(F1) \neq 1$, $\varphi(F2) \neq 1$.

Переход от непосредственного представления о значениях истинности к рассмотрению оценки как **элемента некоторой структуры**, в рассматриваемом выше случае как элемента булевой алгебры подмножеств некоторого множества, позволяет обобщить этот переход и рассматривать оценки со значением на алгебраических структурах более общего вида как, например, в работе [4]. Такое рассмотрение позволяет раскрыть некоторые аспекты в природе формальной логики в форме многозначных и неклассичеких исчислений и вместе тем проследить диалектический аспект их порождения в зависимости от природы отношений на структуре оценки.

2.3 Нарушение «принципа» оценки как гомоморфизма.

Нарушение введенного выше принципа в пропозициональной логике приводит к нежелательным результатам, например, в известном варианте многозначной пропозициональной логики в качестве значений истинности вместо двухэлементной булевой алгебры {0,1} рассматриваются значения истинности из множества чисел $0 \leq x \leq 1$, на котором не сохраняется структура булевой алгебры. В результате при $\varphi A=1/2$ имеем $\varphi(A \vee \neg A)=1/2$, что плохо согласуется с интуицией (связано с переносом интерпретаций операций как **min** и **max**, которые естественны для двухзначной логики).

«Наш основной вопрос касается возможности такого обобщения, которое допускало бы естественный (однозначный) гомоморфизм булевой алгебры «всех» высказываний на заданную алгебру значений истинности. Эта трудность становится особенно понятной, если рассматривать свойства вероятности: естественные функции (вероятностные меры) от высказываний, принимающие значения в [0,1], не являются гомоморфизмами для операций $\wedge$, v, или $\to$..» [13]

Приведенные рассуждения позволяют высказать предположение о возможности построения вариантов пропозициональной логики как алгебр гомоморфных семантическим структурам.

2.4. Реконструкция неклассических логик по значениям на решетке с дополнением.

Вариант логики без законов исключенного третьего и противоречия может быть реконструирован, если в качестве семантической структуры взять решетку с двумя видами дополнения.

В частности, покажем, что такая структура эквивалентна исчислению Н-В логики.

Список аксиом Н-В логики состоит из всех формул вида [5]:

$$1.\ (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))\quad 2.\ \alpha \to \alpha \vee \beta$$

$$3.\ \beta \to \alpha \vee \beta \quad 4.\ (\alpha \to \gamma)\ ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$$

$$5.\ \alpha \wedge \beta \to \alpha \qquad 6.\ \alpha \wedge \beta \to \beta$$

$$7.\ (\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to \alpha \wedge \beta)) \qquad 8.\ (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \wedge \beta \to \gamma)$$

$$9.\ (\alpha \wedge \beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \qquad 10.\ \alpha \to (\beta \vee (\alpha \div \beta))$$

$$11.\ (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \qquad 12.\ (\alpha \div \beta) \to \ulcorner(\alpha \to \beta)$$

$$13.\ ((\alpha \div \beta) \div \gamma) \to (\alpha \div \beta \vee \gamma) \qquad 14.\ \neg(\alpha \div \beta) \to (\alpha \to \beta)$$

$$15..\ (\alpha \to (\gamma \div \gamma)) \to \neg\alpha \qquad 16.\ \neg\alpha \to (\alpha \to (\gamma \div \gamma))$$

$$17.\ ((\gamma \to \gamma) \div \alpha) \to \ulcorner\alpha \qquad 18.\ \ulcorner\alpha \to ((\gamma \to \gamma) \div \alpha)$$

Единственными правилами вывода являются modus ponens и

$$(\ulcorner)\ \alpha / (\neg \ulcorner \alpha).$$

Н-В исчисление есть алгебра <А, $\cap, \cup, \to, \div, \neg, \ulcorner$, 0,1> [5].

В качестве семантической структуры, выберем структуру вида <А, $\cap, \cup, \Rightarrow, \div, -, \urcorner$, 0,1> , которую назовем Н-В –алгеброй. Это решетка, в которой для любых двух элементов существует псевдодополнение ($\Rightarrow$), и псевдоразность ($\div$). В такой решетке для каждого ее элемента a существует два вида дополнения: $\cap$-дополнение: $-a= a \Rightarrow 0$, и $\cup$-дополнение $\urcorner a= 1 \div a$. В [6] показано, что $\urcorner a \geq -a$.

Для операции ($\Rightarrow$) и отрицания ($-$) истинны утверждения (Н1-Н36) [6], для ($\div$) и ($\urcorner$) (В1-В36), полученные по на основании принципа двойственности.

Аксиомы (1-9, 11) есть аксиомы интуиционистской логики и потому истинны в Н-В логике.

Остальные доказываются через свойства операций на импликативных решетках с двумя видами дополнения. Ниже приводятся эти доказательства, со ссылкой на свойства операций (Н1-Н36) как они приведены в [6] для импликативных решеток и псевдобулевой алгебры, обозначения (В1-В36) означают свойства операций двойственные к свойствам (Н1-Н36).

$$10.\ \alpha \to (\beta \vee (\alpha \div \beta))$$

Из определения операции (÷) получим, что $(\beta \vee (\alpha \div \beta)) \geq \alpha$.. Тогда (10) следует из Н1.

$$12.\ (\alpha \div \beta) \to \ulcorner(\alpha \to \beta)$$

Из свойств дополнений $\urcorner(\alpha\to \beta)\geq -(\alpha\to \beta)$, кроме того по определению $\urcorner(\alpha\to\beta)\cup(\alpha\to\beta)\equiv 1$, откуда $\urcorner(\alpha\to\beta)\cup(\alpha\to\beta)\geq \alpha\cup(\alpha\to\beta)= (\alpha\cap\urcorner\beta)\cup(\alpha\to\beta)\geq (\alpha\cap-\beta)\cup(\alpha\to\beta)$, откуда $\urcorner(\alpha\to\beta)\geq (\alpha\cap-\beta)$ (12.1), иначе $\alpha\cup(\alpha\to\beta)\equiv 1$, но в решетке $A^{a\cap b}$ $\alpha\cup(\alpha\to\beta)= \alpha\cup-\alpha$.- противоречие. Неравенство (12.1) и Н1 дают искомый результат.

$$13.\ ((\alpha \div \beta) \div \gamma) \to (\alpha \div \beta \vee \gamma)$$

Из В15 $(\alpha \div \beta) \div \gamma)=(\alpha \div \beta \vee \gamma)$, тогда из Н1 следует (13).

$$14.\ \neg(\alpha \div \beta) \to (\alpha \to \beta).$$

Действительно $-(\alpha \div \beta) \cap(\alpha \div \beta)=0$, следовательно $\neg(\alpha \div \beta) \cap(\alpha \div \beta)\geq 0$. таким образом, $0=-(\alpha \div \beta) \cap(\alpha \div \beta)\leq \beta\cap(\alpha \div \beta)= (-\alpha \cup \beta) \cap(\alpha \div \beta) \leq$/в соответствии с (Н36)/$\leq (\alpha\to \beta) \cap(\alpha \div \beta)$, откуда $(\alpha\to \beta)\geq \urcorner(\alpha \div \beta)$ (14.1), иначе $\beta\cap(\alpha \div \beta)\equiv 0$, но в решетке $A_{a\cup b}$ $\beta\cap(\alpha\div\beta)= \beta\cap\urcorner\beta\geq 0$ –противоречие. Неравенство (14.1) и Н1 дают искомый результат.

$$15..\ (\alpha \to (\gamma \div \gamma)) \to \neg\alpha$$

Из В3 $(\gamma \div \gamma)=0$, тогда (15) следует из определения псевдодополнения.

$$16.\ \neg\alpha \to (\alpha \to (\gamma \div \gamma))$$

Из В3 $(\gamma \div \gamma)=0$, тогда $(\alpha\to (\gamma \div \gamma)) = -\alpha$. Откуда из Н3 $-\alpha\to (\alpha \to(\gamma \div \gamma))$.

$$17.\ ((\gamma\to\gamma) \div \alpha) \to \ulcorner\alpha$$

Из Н3 $(\gamma\to\gamma)=1$, тогда по определению $((\gamma\to\gamma) \div \alpha)= \urcorner\alpha$, откуда $((\gamma\to\gamma) \div \alpha) \to\urcorner\alpha$.

$$18.\ \urcorner\alpha\to ((\gamma\to\gamma) \div \alpha)$$

Доказывается так же как (17).

3 Разделение значений оценки, «семантическая» оценка.

Выше приводилось утверждение Гегеля о том, что «Диалектический момент есть снятие такими конечными определениями самих себя и их переход в свою противоположность.» [1]. Эти конечные определения есть наличное бытие, про которое в спекулятивной философии Гегеля говорится, что «Наличное бытие есть *определенное* бытие; его определенность есть *сущая* определенность, *качество*. Своим качеством нечто противостоит *иному*, оно *изменчиво и конечно*, определено всецело отрицательно не только в отношении иного, но и в самом себе. Это отрицание прежде всего по отношению к конечному нечто есть *бесконечное* абстрактная противоположность, в которой выступают эти определения, разрешается в лишенную противоположности бесконечность, в *для- себя-бытие*.» [2].

Переводя это в плоскость формальной логики, получим что оценка есть в ней то, что определяет конкретный вид формального исчисления как наличное бытие. Наличное бытие как качество конечно и изменчиво, однако отрицание, которое как определяет качество, так и обеспечивает его изменчивость, есть в то же время отрицание и его конечности, т.е. есть бесконечное. Это отрицание как по отношению к нечто, так и по отношению к иному есть для-себя-бытие. Таким образом, качество как положительное как сущее есть реальность, качество же «обремененное» отрицанием, «есть отрицание вообще» и определяется как граница или предел. Но как предел в философии Гегеля определяется и становление.

И если конкретное значение оценки – истинность формулы алгебры логики мы определим как качество, как ее определенность, то количественное значение оценки должно выступать как внешняя этому бытию определенность или как снятая определенность. И только в мере, которую Гегель определяет как качественное количество, они находят свое единство. В частности для суждение «А есть В», считается истинным лишь если все а из А есть В. И не важно для скольких «а» это не выполняется, пока найдется хотя бы одно - данное утверждение ложно в традиционной логике. Т.е. в этом случае на множество всех объектов вводится мера имеющая два значения: 0 и1, причем $\forall C\subset A$ и /C/=0, и лишь /A/=1. Если же $C\subset D$ и при этом $D\neq A$, то также /D/=0, хотя D и содержит «больше» чем C элементов со свойством B, но это можно трактовать как то, что при переходе от C к D истинность меняется на бесконечно малую величину.

3.1. Оценка на булевой алгебре.

Определим оценку со значением в A как *гомоморфизм* $\upsilon:V_0\rightarrow A$ где A некоторая не обязательно двухэлементная булева алгебра,, в частности $\upsilon:V_0\rightarrow \boldsymbol{P}(I)$, где I некоторое множество.

Пусть ϕ- формула языка структуры ***K***, и ϕ_k оценка этой формулы в решетке **B**={0,1}. $\|\phi_k\|$ оценка этой формулы в $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ [7], т.е оценкой будем называть функцию вида $\|\ \|$: $Fm\rightarrow\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$, где V число переменных языка L, а $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ решетка, элементами которой служат подмножества $\boldsymbol{K}^V$. Булева решетка $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ есть расширение решетки **B,** в котором $\boldsymbol{K}^V$=1, Ø=0. Однако в структуре $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ значением оценки служит любое подмножество $J\subseteq\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$. По аналогии с [7] введем предикат $Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|\in j)$, где j – некоторое подсемейство $P(K^V)$. Рассмотрим, как выбор семейства j может повлиять на связь между оценками ϕ_k и $Tr_j(\phi_k)$, различие которых служит основанием для разделения типов логических исчислений.

В нестанданртном анализе рассматривается множество - степень K^I, а оценка принимает значения на $P(I)$, выбор в качестве j ультрафильтра в $P(I)$ позволяет заменить $Tr_j(\phi_k)$ «обычной» истинностью суждения ϕ_k о структуре K^I. Поскольку для ультрапроизведений $K^I|j\equiv K^I|\sim_j$, имеем $\phi_{k|j}([f_1],[f_2],\ldots[f_n])\Leftrightarrow([\phi_k(f_1, f_2,\ldots,f_n)]\in j)$, где $[f_i]\in K^I|j$. Как будет показано ниже это фактор – множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик. Ситуация в нестандартном анализе отличается от рассматриваемой далее выбором множества на котором принимает значение оценка, однако имеет ту же диалектическую природу; а именно, истинность как мера на множестве индексов, не являющихся элементом ультрафильтра является бесконечно малой величиной и, следовательно, результатов оценки формулы на этой совокупности индексов не достаточно для изменения в сторону понижения, если на оставшихся индексах она равна 1, и повышения, если она на них равна нулю.

Нас, как было указано, интересует случай, когда оценка есть функция $Fm\rightarrow\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$. Поскольку $\boldsymbol{K}^V$ есть семейство функций $f:\boldsymbol{V}\rightarrow\boldsymbol{K}$ из множества в множество, т.е. само является множеством, то будем рассматривать его как множество, проиндексированное некоторым семейством **I**. В дальнейшем $\boldsymbol{K}^V$ =**I**.

Если рассматривается оценка со значениями в $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$, т.е. оценка $\|\phi_k\|:\phi\rightarrow\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$, то при условии, что j ультрафильтр над $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$ получим оценку в ультрапроизведении $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})|\sim_j$,. В [3] доказано, что если фильтр j в псевдобулевой алгебре A максимален, то фактор - алгебра $A|\sim_j$, содержит два элемента, т.о. отношение эквивалентности $\sim_j$ приводит к оценке на булевой алгебре $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})|\sim_j=\mathbf{B}=\{0,1\}$.

Пусть $\|\phi_k\|$ оценка формулы ϕ_k в $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$. Введем отношение $\sim_j$ между оценками, такое, что $\|\phi_k\|\sim_j\|\phi_k^1\|\Leftrightarrow\|\phi_k\|\Rightarrow\|\phi_k^1\|\in j$ и $\|\phi_k^1\|\Rightarrow\|\phi_k\|\in j$, где j фильтр решетки $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$ [3].

В [3] доказано, что $\sim_j$ отношение эквивалентности и для любой оценки $\|\phi_k\|$ такой, что для любой оценки $\|\phi_k\|$, такой, что $\|\phi_k\|\in j$ справедливо $\|\phi_k\|\sim_j$ **I=1**

Таким образом, как и в случае нестандартного анализа, выбор в качестве j максимального фильтра позволяет заменить $Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|\in j)$ «обычной» истинностью суждения ϕ_k о структуре *K*. В то же время этого нельзя сделать при $Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|=1)$, т.е. в случае если в качестве j выбран единичный фильтр. С математической точки зрения это объясняется тем, что при выбранном отношении эквивалентности только оценка равная **I** дает значение истинности равное 1. Кроме того, для любых оценок таких, что $\|\phi_k\|\subset\|\phi_k^1\|$ будет иметь место $\|\phi_k\|<\|\phi_k^1\|$. С точки зрения приведенных выше рассуждений это означает, что при таком выборе фильтра каждый элемент множества **I** обладает конечной мерой и множество значений оценок эквивалентно мощности $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$.

Рассмотрим это подробнее. В работе [4] рассматривается взаимоотношения семантик:

1) $Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|=1)$ и ϕ_k, показано, что для оценки на булевой алгебре $P(I)$ $Tr_j(\phi_k)\rightarrow\phi_k$ для хорновых формул и $\phi_k\rightarrow Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|=1)$ для позитивных. Т.е. в общем случае оценки при этих видах истинности в общем случае не совпадают.

2) В то же время для семантик $Tr_j(\phi_k) \equiv (\|\phi_k\| \in F)$, где F – ультрафильтр $Tr_j(\phi_k) \leftrightarrow \phi_k$ для всех формул. Оба утверждения доказываются индукцией по длине формул.

Рассмотрим оба взаимоотношения с точки зрения оценки как отображения на $P(I)|\sim_j$. Для этого, как и выше, на множестве оценок $P(I)$ введем отношение эквивалентности $\sim_j$.

1. $Tr_j(\phi_k) \equiv (\|\phi_k\| \in F)$, где F – ультрафильтр. В этом случае $P(I)|\sim_j = P(I)|\sim_F = B$. Действительно, поскольку F ультрафильтр, то для любого $a \in P(I)$ $a \in F$ либо $-a \in F$. Следовательно, $\forall\, a \in P(I)$ либо $|a|=1$ и $|-a|=0$, либо $|a|=0$ и $|-a|=1$, где $|a| \in P(I)|\sim_F$. Таким образом, в этом случае структуры значений оценок для $Tr_j(\phi_k)$ и ϕ_k изоморфны. Это значит, что для каждого вида оценки, они сводятся к гомоморфизмам $\varphi: Fm \to B$ для оценки $Tr_j(\phi_k)$ и $\psi: Fm \to B$ для оценки (ϕ_k), причем эти гомоморфизмы совпадают на системе образующих алгебры Fm, а значит и на всей алгебре Fm.

2. $Tr_j(\phi_k) \equiv (\|\phi_k\| = 1)$. В этом случае $P(I)|\sim_j = P(I)|\sim_1 = P(I)$. Действительно, поскольку F ультрафильтр, то для любых $a \in P(I)$ $b \in P(I)$ $a \sim_1 b$ тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$ и $b \to a = 1$, т.е тогда и только тогда, когда a=b. Это означает, что $P(I)|\sim_F = P(I)$. Таким образом, в этом случае структуры значений оценок для $Tr_j(\phi_k)$ не ϕ_k изоморфны если $P(I)$ содержит более двух элементов.

Рассмотрение оценок позволяет получить простое доказательство следующего известного утверждения.

Утверждение.

Если фильтр над булевой алгеброй прост, то он максимален.

Доказательство.

Если это не так, то найдется $a \in P(I)$, такое, что $a \notin j$ и $-a \notin j$. Тогда $a \in i$ и $-a \in i$, где i – простой идеал и $i \cup j = I$, но тогда $\|a \cup -a\| < 1$ и $P(I)$ не булева алгебра. Пришли к противоречию.

3.2 Оценка на псевдобулевой алгебре.

Рассмотрим случай, когда j фильтр над импликативной решеткой (псевдобулевой алгеброй) $\mathfrak{I}(\boldsymbol{I}) \subseteq \boldsymbol{P(I)}$, элементы которого являются значением оценки некоторого суждения ϕ_k о структуре $\boldsymbol{K}$.

Пусть $\|\phi_k\|$ оценка формулы ϕ_k в $\mathfrak{I}(\boldsymbol{K}^V)$. Введем отношение ~ между оценками, причем $\|\phi_k\| \sim \|\phi_k^1\| \Leftrightarrow \|\phi_k\| \in j$ и $\|\phi_k^1\| \in j$.

Отношение ~ есть отношение эквивалентности на множестве оценок, кроме того, отношение эквивалентности $\sim_j$ такое, что $\|\phi_k\| \sim_j \|\phi_k^1\| \Leftrightarrow \|\phi_k\| \Rightarrow \|\phi_k^1\|$ и $\|\phi_k^1\| \Rightarrow \|\phi_k\|$ [3], является расширением отношения эквивалентности ~.

Тогда фактор множество $\mathfrak{I}(\boldsymbol{I})|\sim_j$ есть упорядоченное множество оценок, такое что при $\|\phi_k^1\| \in j$ $[\|\phi_k^1\|] = 1_{P(K^V)|\sim j}$. В случае, когда j, как выше, - максимальный фильтр $\mathfrak{I}(\boldsymbol{I})|\sim_j = \{0,1\}$ и логика индуцированная оценкой есть классическая логика. При выборе в качестве j единичного фильтра, логика, индуцированная оценкой, будет интуиционистской.

Пусть структура $\mathfrak{I}(\boldsymbol{I}) \subseteq \boldsymbol{P(I)}$ есть решетка A с нулем и единицей вида $\langle A, \cap, \cup, \to, \div, \neg, \ulcorner, 0, 1\rangle$, где $\div$ относительная разность, $\ulcorner a = 1 \div a$, $\neg a = a \to 0$, т.е. решетка, в которой два вида дополнения. Выше было показано, что оценке со значениями структуре A соответствует Н-В логика, в которой закон противоречия не выполняется для отрицания $\ulcorner$, т.е. оценка $\|a \wedge a\| \geq 0$ [1;5]. Следовательно, логика индуцированная оценкой при j=1 окажется логикой, в которой не выполняется закон противоречия.

3.3. Modus ponens и оценка на псевдобулевой алгебре.

Структура, на которой принимает значение оценка формул формального языка и отношения эквивалентности на ней определяют не только тип логики, но и правила вывода, соответствующие типу логики. Например, приведенное в [7] требование выполнимости правила modus ponens, которое на языке оценок выглядит как: $\|\phi_k\| = 1$, $\|\phi_k \Rightarrow \phi_k^1\| = 1$ влечет $\|\phi_k^1\| = 1$ (1) есть частный случай правила $\|\phi_k\| \in j$, $\|\phi_k \Rightarrow \phi_k^1\| \in j$ влечет $\|\phi_k^1\| \in j$, (2) где j – фильтр на алгебре оценок. В modus ponens j=1. Но (2) - свойство импликативной решетки. Таким образом, modus ponens в форме (2) является правилом вывода для всех логик со значениями на импликативных решетках (псевдобулевых алгебрах).

4 Отношение эквивалентности на значениях оценки как основа синтеза логических исчислений.

Предположение о наличии гомоморфизма $\varphi: Fm \to \mathbf{B}$ из алгебры формул $\langle Fm, o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n\rangle$ формального языка L является в подобную ей алгебру значений оценок $\langle A, o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n, \rangle$ позволяет, как показано выше, рассматривать деление логических исчислений по типам, которое основано на рассмотрении различных типов оценок. В тоже время, это позволяет рассматривать варианты синтеза разных типов логических исчислений на основе отождествления значений оценок на структурах оценки различного типа, в результате которого изначально различные структуры оценки естественным гомоморфизмом отображаются в изоморфные алгебры оценки. В этом случае окончательно оценка рассматривается как композиция гомоморфизмов со значением в одной области прибытия.

Пусть F – фильтр и A – импликативная решетка. $\forall a,b \in A$ Считаем, что $a \leq_F b \Leftrightarrow a \Rightarrow b \in F$. В [6] показано, что отношение $\leq_F$ является отношением предпорядка. Введенный предпорядок порождает отношение эквивалентности $\approx_F$, $a \approx_F b \Leftrightarrow a \Rightarrow b \in F$ и $b \Rightarrow a \in F$, т.е. $a \approx_F b \Leftrightarrow$ $a \leq_F b \wedge b \leq_F a$.

Отношение предпорядка определяет отношение порядка $\leq$ на фактор-множестве $A/F = A/\approx_F$, которое является импликативной решеткой, а эквивалентность $\approx_F$ конгруэнцией по отношению к операциям на решетке A/F.

Обратно, если ~ конгруэнция в импликативной решетке A, то множество $F = \{a \mid a \in A \wedge a \sim 1\}$ – фильтр и отношение ~ есть эквивалентность $\approx_F$, определяемая фильтром F.

Пусть Ω – полная гейтингова алгебра, на которой принимают значения формулы формального языка *L*. F – фильтр на алгебре Ω. Пусть значения оценок a,b∈Ω эквивалентны, если $a \approx_F b$, тогда фактор-множество Ω/F упорядочено отношением ≥, таким что $\forall[a],[b] \in\Omega$ $[a] \geq [b] \Leftrightarrow a \geq_F b$. Если F-ультрафильтр, то фактор-множество Ω/F как было показано выше имеет ровно два элемента. Оценка на алгебре Ω композицией гомоморфизмов сводится к оценке на двухэлементной булевой алгебре. Такая оценка приводит к соотношению, которое известно как теорема Лося, используемая в нестандартном анализе для доказательства эквивалентности оценок формул со значениями переменных в стандартном поле действительных чисел и его нестандартном расширении.

Выберем в качестве F простой фильтр. Если Ω булева алгебра, то оценка на Ω/F снова имеет лишь два значения, поскольку в булевой алгебре простой фильтр является максимальным, и рассматриваемая логика остается классической. Если Ω гейтингова алгебра $<\mathbf{\Omega}, \cap,\cup, \rightarrow, -, 0,1>$, не являющаяся булевой и F простой не максимальный фильтр, то дополнение к нему в решетке Ω есть простой идеал I. Тогда найдутся элементы a, -a алгебры Ω, где –a псевдодополнение элемента a, такие, что a, -a∈I. Это означает, что a∪-a∈I, но по построению I простой идеал, следовательно, a∪-a<1. Это значит, что рассматриваемая логика со значением оценки на алгебре Ω является интуиционистской.

Выберем в качестве Ω алгебру вида $<\Omega, \cap,\cup,\div,\neg, 0,1>$, где ÷ бинарная операция, являющаяся псевдоразностью элементов решетки Ω, ¬ - дополнение элемента $a \in \Omega$, представленного как $\neg a = 1 \div a$. Пусть I идеал на $\forall a,b \in \Omega$ считаем, что $a \leq_I b \Leftrightarrow a \div b \in I$. Легко показать, что отношение $\leq_I$ является отношением предпорядка. Введенный предпорядок порождает отношение эквивалентности $\approx_I$, $a \approx_I b \Leftrightarrow a \div b \in I$ и $b \Rightarrow a \in I$, т.е. $a \approx_I b \Leftrightarrow a \leq_I b \wedge b \leq_I a$.

Отношение предпорядка $\leq_I$ определяет отношение порядка $\leq$ на фактор-множестве $\Omega/I = \Omega/\approx_I$, а эквивалентность $\approx_I$ является конгруэнцией по отношению к операциям на решетке Ω/I.

Обратно, если ~ конгруэнция на решетке Ω, то множество $I = \{a \mid a \in \Omega \wedge a \sim 0\}$ – фильтр и отношение ~ есть эквивалентность $\approx_I$, определяемая идеалом I.

Выберем в качестве I простой идеал. Если Ω булева алгебра, то оценка на решетке Ω/I имеет лишь два значения, поскольку в булевой алгебре простой идеал является максимальным, и рассматриваемая логика остается классической. Если Ω не является булевой и I простой не максимальный идеал, то дополнение к нему в решетке Ω есть простой фильтр F. Тогда найдутся элементы a, ¬ a алгебры Ω, где ¬ a =1÷a, такие, что a, ¬ a∈F. Это означает, что a∩¬ a∈F, но по построению F простой фильтр, следовательно, a∩¬ a>0. Следовательно, рассмотрение оценок со значениями на алгебре Ω/I приводят паранепротиворечивой логике. Выбор в качестве I максимального идеала делает логику со значениями оценки на Ω/I классической.

Приведенные выкладки показывают, что в зависимости от выбора алгебраической структуры, на которой принимают значения оценки формул языка формального языка *L* и выбора отношения эквивалентности на множестве значений оценок, может быть получена как классическая так и не классическая теории одной и той же алгебраической системы ***K***.

В то же время отношения эквивалентности определенного типа, как это уже было показано на примере нестандартного анализа, могут приводить к синтезу классической логики, в том числе для вариантов не классического логического исчисления.

5 Синтез классической логики эквивалентностью оценок на элементах ультрафильтра

Пусть на булевой решетке **Ω** (например, решетке подмножеств) оценки введена некоторая топология $\mathfrak{J}(\Omega)$. Определим операции на алгебре $\mathfrak{J}(\Omega)$ следующим образом:

$b \div a = \mathbf{C}(-a) \cap b$, $a \to b = \mathrm{I}(-a) \cup b$, $\neg a = 1 \div a = \mathrm{C}(1-a)$, $-a = a \to 0 = \mathrm{I}(1-a)$, где $\mathbf{C}(a)$ означает замыкание элемента решетки *a*, I(*a*)- операцию взятия внутренности элемента решетки *a*. Бинарные операции на **Ω** соответствуют обычным решетчатым операциям.

Для любого элемента решетки *a*, имеем $a \cap -a = 0$, $a \cup -a \leq 1$, причем для открытых элементов решетки, т.е. такие, что $a = \mathrm{I}(a)$, при условии, что дополнение элемента не является открыто-замкнутым, неравенство становится строгим. Так же для любого элемента решетки имеем $a \cap \neg a \geq 0$, $a \cup \neg a = 1$. Для замкнутых элементов, т.е. таких, что $a = \mathrm{C}(a)$, при условии, что дополнение элемента не является открыто-замкнутым, неравенство становится строгим. Топологическая булева алгебра $<\mathbf{\Omega}, \cap, \cup, \to, \div, -, \neg$, I, C, 0,1> с введенными выше операциями становится вариантом Н-В исчисления, описанного выше [3].

Пусть **F**- максимальный фильтр в **Ω,** тогда **I=Ω-F,** максимальный идеал. Определим отношение эквивалентности $\approx_F$ на алгебре значений оценок **Ω.** Будем считать $a \approx_F b \Leftrightarrow a \Rightarrow b \in F$ и $b \Rightarrow a \in F$, аналогично $a \approx_{\mathrm{I}} b \Leftrightarrow a \div b \in \mathrm{I}$ и $b \div a \in \mathrm{I}$. Фактор множества $\Omega / \mathrm{I} = \Omega / \approx_{\mathrm{I}}$ и $\Omega / F = \Omega / \approx_F$ состоят каждое из двух элементов и являются булевыми решетками.

Оценки на структурах $\mathbf{\Omega}\,|\,\sim_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{\Omega}\,|\,\sim_{\mathrm{F}}$ приводят к классическому логическому исчислению с алгеброй подобной булевой алгебре $<\Omega / F, \cap, \cup, \Rightarrow, -, >$.

Введение эквивалентности значений оценки на структуре **Ω,** привело к эквивалентности семантик ϕ_k и Tr (ϕ_k) [4] и логика свелась к классической. Однако в результате синтеза, полученного на основе описанного отношения эквивалентности, теории, описываемые в синтезированной логике, приобретают новое качество. Например, в нестандартном анализе это приводит к расширению теории упорядоченных полей, включением в нее теории неархимедовых полей, что непосредственно связано с синтезом описанных выше семантик ϕ_k и Tr (ϕ_k) $\Leftrightarrow \|\phi_k\| = 1$ на основе ультрапроизведений, выраженном в логике в формулировке теоремы Лося и принципа переноса.

Заключение

Математика, развиваясь как формальная наука, и опираясь на тот тип мышления, который характеризуется Гегелем как рассудочный, отличный от разумного спекулятивного, для которого естественно наличие противоречия в определяемом объекте, тем не менее, приводит к результатам, выходящим за рамки рассудочной деятельности. В частности «Изложенное выше и есть та же диалектика, которой пользуется рассудок против даваемого высшим анализом понятия *бесконечно малых величин*. Величины эти определены как величины, *существующие в своем исчезновении* – не до своего исчезновения, ибо в таком случае они конечные величины, и не *после* своего исчезновения, ибо в таком случае они *ничто*….Математика обязана своими самыми блестящими успехами тому, что она приняла то определение, которого не признает рассудок.» [2]. И хорошо известно сколь долгий путь пришлось пройти до того, как бесконечно малые приобрели статус величин. Можно сказать, что Гегель предвосхитил их актуализацию. Отношение эквивалентности предоставляет возможность интерпретировать положение Гегеля о том, что в отличие от качества, которое есть тождественная бытию определенность, количество есть определенность внешняя бытию. Находят они свое единство в мере, которая есть качественное количество. В частности, это положение подается интерпретации путем введения отношения эквивалентности на множестве значений оценки при семантическом анализе типов формально логики.

Литература

1. *Гегель Г.В.Ф.* Энциклопедия философских наук. т.1. – М.: «Мысль», 1974,- 452 с.
2. *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. СПб, «Наука», 1997,- 799 с.
3. *Гольдблат Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М.»Мир» 1983. с.16.
4. *Линдон Р.* Заметки по логике. М. «Мир», 1968, - 127 с.
5. *Лосев А.Ф.* «Философия имени».: М. МГУ, 1990, -270 с.
6. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды.-М.: АН СССР, Институт философии М. «Наука», 1989, - 263с.
7. *Любецкий В.А.* Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем.// П.Т.Джонсон. Теория топосов.-М.: «Наука», 1986.- сс.376-430

8. *Васюков В.Л.* «Категорная логика».-М.: АНО Институт логики. 2005,- 194 с.
9. *Рассева Е., Сикорский Р*. Математика метаматематики. -М.: «Наука», 1972,- 591 с.
10. *Титов А.В.* Семантический анализ логических исчислений// Материалы Второй международной научной конференции «Философия математики актуальные проблемы».-М.: МГУ,2009. сс. 140-144.
11. *Титов А.В.* Постр-е клас-ой и неклас-й теорий алгеб-ой системы выбором эквивалентности на значениях оценки//Материалы международной конференции «Шестые Смирновские чтения по логике».-М.: 2009, сс.36-38
12. *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Математическая логика.- М.: «УРСС», 2004, - 238 с.
13. *Биркгоф Г.* Теория решеток.- М.: «Наука», 1984, - 564 с.