

16.1 СЕКЦИЯ. УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ

DOI:

АНАЛИЗ АЛГОРИТМА С ДЕАКТИВАЦИЕЙ АКТИВНЫХ УЗЛОВ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РОСТОМ

Гилязова А.А.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

giliazova@mail.ru

Аннотация: В данной работе исследуется модель с деактивацией активных пользователей и экспоненциальным ростом для построения неориентированных графов со статистическими свойствами, схожими с онлайнowymi социальными сетями.

Ключевые слова: алгоритм с деактивацией активных узлов, неориентированный граф, экспоненциальный рост, модели роста сетей, онлайн-социальная сеть.

Введение

В настоящее время широкое распространение получили онлайн-социальные сети, являющиеся важным каналом коммуникации для общества. В частности, это дало возможность исследователям собирать данные о структуре графов социальных сетей, состоящих из миллионов пользователей [1]. Как показано в [2], структура онлайн-социальных сетей схожа с оффлайн-сетями. Знания о закономерностях структуры социальных сетей позволяют решать ряд практических задач, связанных, например, с поиском наиболее влиятельных пользователей и информационным управлением [3].

Один из методов исследования структуры таких сетей – построение алгоритмов, генерирующих графы со схожими статистическими свойствами. Например, для получения графов со схожим распределением степеней (степенное распределение степеней вершин) часто используется модель Барабаши-Альберт с предпочтительным присоединением [4][5][6]. Но ввиду того, что подобное распределение степеней встречается часто, и не только в социальных сетях [7][8][9], может иметь практическую значимость исследовать и другие типы стохастических механизмов, генерирующих схожий тип распределения.

В данной работе исследуется алгоритм формирования сети с деактивацией (отсевом) активных пользователей, представленный в [10]. В [11] были представлены аналитические выражения для ряда статистических характеристик получаемых графов для случая линейного роста. В данной работе исследуется этот алгоритм для случая экспоненциального роста, поскольку он может наблюдаться в реальных социальных сетях. Представлены аналитические выражения некоторых статистических характеристик получаемых графов, позволяющие более эффективно использовать данный алгоритм.

1 Распределение степеней в реальных социальных сетях

При моделировании графов социальных сетей часто полагают, что распределение степеней узлов является степенным [12][13][14], в соответствии с моделью Барабаши-Альберт (Рис. 1). Однако реальное распределение степеней имеет особенности, видимые на Рис. 2, а в частности, горизонтальный участок на графике.

Рассматриваемый в данной работе алгоритм генерирует графы с линейным ростом¹ со схожим распределением (Рис. 3), что приближает генерируемые графы к реальным. Стоит также заметить, что алгоритм имитирует поведение реальных пользователей, как и модель Барабаши-Альберт.

¹ Работа на тему графов с линейным ростом выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00820 А.

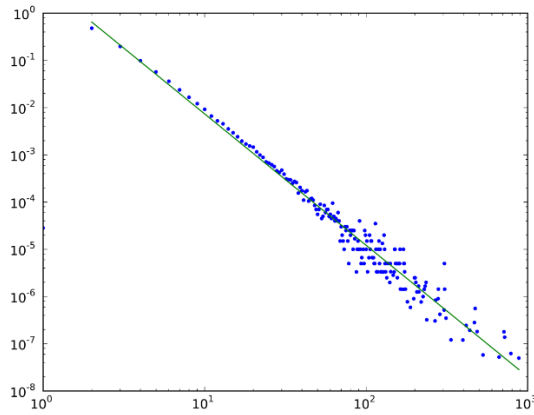


Рис.1. Распределение степеней модели БА, которое подчиняется степенному закону. В логарифмическом масштабе степенная функция представляет собой прямую линию.[15]

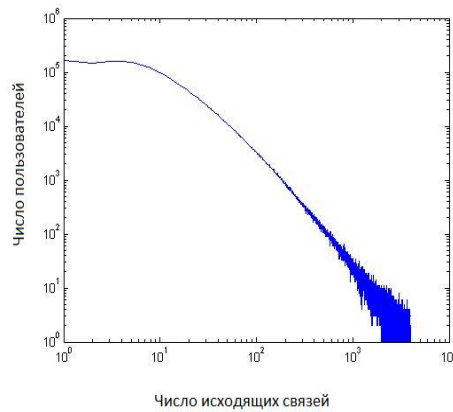


Рис. 2. Распределение численности пользователей по числу исходящих связей в русскоязычном сегменте социальной сети Facebook [16]

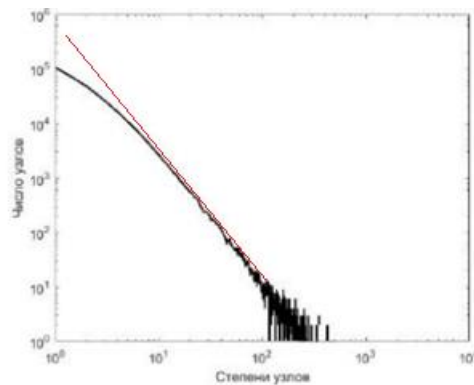


Рис. 3. Пример распределения степеней узлов сгенерированного графа по алгоритму с отсевом активных узлов с линейным ростом. [17]

Однако, распределение степеней графов с экспоненциальным ростом отличается от безмасштабного (Рис. 4), что делает модель с линейным ростом более предпочтительной. Это показывает, что модель чувствительна к типу роста графа. Тем не менее, анализ алгоритма с экспоненциальным ростом остаётся интересным, в виду того, что такой тип роста часто встречается в социальных сетях.

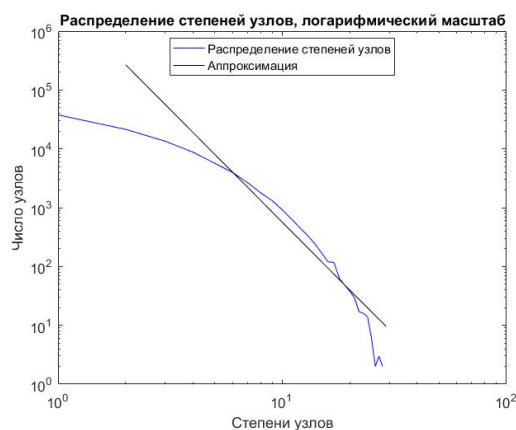


Рис. 4. Пример распределения графа с экспоненциальным ростом при $V=0,5$, $X_0=10$.

2 Описание алгоритма

Алгоритм 1.

Входными данными алгоритма являются значения следующих параметров:

$X_0 > 0$ – начальное число узлов в сети, в расчётах полагается, что все начальные узлы являются активными и несвязанными (изолированными), т.е. начальное число связей равно нулю,

$V > 0$ – темп прироста числа узлов,

$P \in (0,1]$ – вероятность образования новой связи активными узлами,

$G \in (0,1)$ – доля активных узлов, деактивируемых (отсеиваемых) на каждом шаге,

N – требуемое количество связанных узлов, по достижении или превышении которого работа алгоритма останавливается.

Выходные данные: граф, построенный в соответствии с указанными значениями параметров.

При построении графа происходит циклическое повторение следующей процедуры до тех пор, пока граф не достигнет требуемого количества узлов N .

1. В сеть добавляется $V \cdot X(T - 1)$ новых активных узлов с округлением вверх, где $X(T - 1)$ – число узлов сети на конец предыдущего шага, $X(0) = X_0 > 0$, т.е. счётчики числа узлов и числа активных узлов увеличиваются на $V \cdot X(T - 1)$.
2. Каждый из активных узлов с вероятностью $P \in (0,1]$ генерирует ненаправленную связь с одним из прочих активных узлов, выбранным случайным образом. Информация о связях может храниться, например, в виде матрицы смежности графа.
3. Доля $G \in (0,1)$ активных узлов, выбранных с вероятностью, обратно пропорциональной числу их связей, включая петли, теряет статус активных. При этом узлы и их связи сохраняются в сети, меняется только статус активности, влияющий на образование новых связей.

Далее совокупность из трёх вышеперечисленных фаз будет называться шагом алгоритма.

В результате работы алгоритма формируется неориентированный граф со статистическими свойствами, схожими с онлайн-овыми социальными сетями.

Примечание 1. Округление.

Число новых узлов, новых связей и отсеиваемых (деактивируемых) узлов при проведении компьютерного моделирования округляются до целых значений таким образом, чтобы максимизировать число узлов и связей в графе, во избежание образования пустого или нерастущего графа при некоторых значениях начальных параметров. Далее в расчётах не учитывается погрешность, вызванная таким округлением, наличие которой обозначается знаком \approx .

Примечание 2. Петли.

При компьютерном моделировании для целей вычисления вероятностей отсева учитываются петли, т.е. все узлы имеют связь с самими собой и их степень не ниже единицы, что предотвращает вероятность деления на нуль при расчёте обратно пропорциональных величин. Но при расчёте итоговых статистических характеристик графов и при аналитических вычислениях в данной работе петли не учитываются.

Примечание 3. Связь с другими моделями.

При $G = 0$ формируется растущий случайный граф.

При $G = 1$ формируется последовательность случайных графов по модели Эрдёша-Реньи.

3 Число узлов

Из определения Алгоритма 1 следует рекуррентная формула определения числа узлов $X(T)$ в конце шага с номером T :

$$(1) \begin{cases} X(T) \approx X(T-1) + X(T-1) \cdot B, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Стоит отметить, что часть узлов отсеиваются, не образовав ни одной связи, поэтому в графе могут быть изолированные узлы.

Выразим $X(T)$ через значения начальных параметров алгоритма и номер шага T .

Утверждение 1. Число узлов $X(T)$ для графа, построенного с помощью Алгоритма 1, в конце шага с номером T можно найти следующим образом:

$$(2) X(T) \approx X_0 \cdot (1 + B)^T.$$

Доказательство. Индукция по T .

База индукции. Из (1) следует: $X(1) \approx X(0) + X(0) \cdot B = X_0 \cdot (1 + B)^1$.

Переход. Предположим, что

$$X(T-1) \approx X_0 \cdot (1 + B)^{T-1},$$

тогда, используя (1), получим:

$$X(T) \approx X(T-1) \cdot (1 + B) = X_0 \cdot (1 + B)^{T-1} \cdot (1 + B) = X_0 \cdot (1 + B)^T,$$

что и требовалось доказать.

По определению Алгоритма 1: $B > 0$.

Используя (2): $X(T) \approx X_0 \cdot e^{T \cdot \ln(1+B)}$, $\ln(1+B) > 0$, т.е. граф растёт экспоненциально.

4 Число и доля активных узлов

Из определения Алгоритма 1 следует рекуррентная формула определения числа активных узлов $M(T)$ в конце шага с номером T :

$$(3) \begin{cases} M(T) \approx (M(T-1) + X(T-1) \cdot B) \cdot (1-G), \\ M(0) = X_0. \end{cases}$$

Выразим $M(T)$ через значения начальных параметров алгоритма и номер шага T .

Утверждение 2. Число активных узлов $M(T)$ для графа, построенного с помощью Алгоритма 1, в конце шага с номером T можно найти следующим образом:

$$(4) M(T) \approx \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot (B \cdot (1+B)^{T-1} + G \cdot (1-G)^{T-1}).$$

Доказательство. Индукция по T .

База индукции. Из (3) и (1) следует:

$$\begin{aligned} M(1) &\approx (M(0) + X(0) \cdot B) \cdot (1-G) = (X_0 + X_0 \cdot B) \cdot (1-G) = X_0 \cdot (1+B) \cdot (1-G) = \\ &= \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot (B \cdot (1+B)^{1-1} + G \cdot (1-G)^{1-1}). \end{aligned}$$

Переход. Предположим, что

$$M(T-1) \approx \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot (B \cdot (1+B)^{T-2} + G \cdot (1-G)^{T-2}),$$

тогда, используя (3) и (2), получим:

$$\begin{aligned} M(T) &\approx (M(T-1) + X(T-1) \cdot B) \cdot (1-G) = \\ &= \left(\frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot (B \cdot (1+B)^{T-2} + G \cdot (1-G)^{T-2}) + X_0 \cdot (1+B)^{T-1} \cdot B \right) \cdot (1-G) = \\ &= \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot \left((1-G) \cdot (B \cdot (1+B)^{T-2} + G \cdot (1-G)^{T-2}) + (B+G) \cdot (1+B)^{T-2} \cdot B \right) = \\ &= \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot (B \cdot (1+B)^{T-2} \cdot (1-G) + G \cdot (1-G)^{T-1} + B \cdot (1+B)^{T-2} \cdot (B+G)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{X_0 \cdot (1 - G) \cdot (1 + B)}{B + G} \cdot (B \cdot (1 + B)^{T-2} \cdot (1 + B) + G \cdot (1 - G)^{T-1}) = \\
&= \frac{X_0 \cdot (1 - G) \cdot (1 + B)}{B + G} \cdot (B \cdot (1 + B)^{T-1} + G \cdot (1 - G)^{T-1}),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Как видно из (4), текущее число активных узлов $M(T)$ не зависит от вероятности образования новых связей P , а кроме того, $M(T)$ прямо пропорционально начальному числу активных узлов X_0 .

Утверждение 3. Число активных узлов $M(T)$ для графа, построенного с помощью Алгоритма 1, при $T \rightarrow \infty$ бесконечно возрастает.

Доказательство.

По определению Алгоритма 1: $0 < G < 1$.

Следовательно, $0 < 1 - G < 1$ и $(1 - G)^T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Тогда при $T \rightarrow \infty$ выражение (4) можно переписать как:

$$\begin{aligned}
(5) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} M(T) &\approx \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{X_0 \cdot (1 - G) \cdot (1 + B)}{B + G} \cdot (B \cdot (1 + B)^{T-1} + G \cdot (1 - G)^{T-1}) \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{X_0 \cdot (1 - G) \cdot (1 + B)}{B + G} \cdot B \cdot (1 + B)^{T-1} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{X_0 \cdot (1 - G) \cdot B \cdot (1 + B)^T}{B + G} \right].
\end{aligned}$$

По определению Алгоритма 1, X_0, B, G являются заданными положительными константами:

$$X_0 > 0, B > 0, 0 < G < 1.$$

Отсюда следует:

$$1 - G > 0 \text{ и } \frac{X_0 \cdot (1 - G) \cdot B}{B + G} = \text{const} > 0,$$

а также

$$1 + B > 1 \text{ и } (1 + B)^T \rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

Следовательно, выражение (5) можно переписать как:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M(T) \approx \text{const} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} [(1 + B)^T] = \infty,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Доля активных узлов в графе, построенном с помощью Алгоритма 1, при $T \rightarrow \infty$ стремится к следующему пределу:

$$(6) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M(T)}{X(T)} \approx \frac{B \cdot (1 - G)}{B + G}.$$

Доказательство.

Найдём долю активных узлов в графе как отношение числа активных узлов к общему числу узлов, используя (2) и (4):

$$\begin{aligned}
(7) \quad \frac{M(T)}{X(T)} &\approx \frac{X_0 \cdot (1 - G) \cdot (1 + B)}{B + G} \cdot \frac{(B \cdot (1 + B)^{T-1} + G \cdot (1 - G)^{T-1})}{X_0 \cdot (1 + B)^T} \\
&= \frac{(1 - G)}{B + G} \cdot \frac{(B \cdot (1 + B)^{T-1} + G \cdot (1 - G)^{T-1})}{(1 + B)^{T-1}}.
\end{aligned}$$

По определению Алгоритма 1: $0 < G < 1$.

Следовательно, $0 < 1 - G < 1$ и $(1 - G)^T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Тогда при $T \rightarrow \infty$ выражение (7) можно переписать как:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M(T)}{X(T)} \approx \frac{(1 - G)}{B + G} \cdot \frac{B \cdot (1 + B)^{T-1}}{(1 + B)^{T-1}} = \frac{B \cdot (1 - G)}{B + G},$$

что и требовалось доказать.

5 Число связей

Из определения Алгоритма 1 следует рекуррентная формула определения числа связей $K(T)$ в конце шага с номером T :

$$(8) \begin{cases} K(T) \approx K(T-1) + (M(T-1) + X(T-1) \cdot B) \cdot P, \\ K(0) = 0. \end{cases}$$

Выразим $K(T)$ через значения начальных параметров алгоритма и номер шага T .

По определению Алгоритма 1, в граф на каждом шаге добавляются новые активные узлы и фаза отсева следует после фазы образования новых связей. Следовательно, в графе должно быть достаточно активных узлов, чтобы на каждом шаге могли образовываться новые связи.

Утверждение 5. Число связей для графа, построенного с помощью Алгоритма 1, в конце шага с номером T можно найти следующим образом:

$$(9) K(T) \approx P \cdot X_0 \cdot \frac{1+B}{B+G} \cdot ((1+B)^T - (1-G)^T).$$

Доказательство.

Обозначим:

$$\Delta(T) = (M(T-1) + X(T-1) \cdot B) \cdot P.$$

Тогда из (8) следует:

$$(10) K(T) \approx K(T-1) + \Delta(T) = \sum_{t=1}^T \Delta(t) = P \cdot \sum_{t=1}^T (M(t-1) + X(t-1) \cdot B) = \\ = P \cdot \sum_{t=1}^T M(t-1) + P \cdot B \cdot \sum_{t=1}^T X(t-1).$$

Из (2) следует:

$$\sum_{t=1}^T X(t-1) \approx \sum_{t=1}^T X_0 \cdot (1+B)^{t-1}.$$

При $q \neq 1$ сумму T первых членов геометрической прогрессии можно найти по известной формуле $S_T = \sum_{t=1}^T b_t = \frac{b_1(1-q^T)}{1-q}$, где $b_t = b_1 \cdot q^{t-1}$, в данном случае $b_1 = X_0, q = 1+B$. Из определения Алгоритма 1 следует, что $B > 0$, следовательно, $q \neq 1$. Получим:

$$(11) \sum_{t=1}^T X(t-1) \approx X_0 \cdot \frac{1-(1+B)^T}{1-(1+B)} = X_0 \cdot \frac{(1+B)^T - 1}{B}.$$

Из (4) следует:

$$(12) \sum_{t=1}^T M(t-1) \approx \sum_{t=1}^T \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot (B \cdot (1+B)^{t-2} + G \cdot (1-G)^{t-2}) = \\ = \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot B \cdot \sum_{t=1}^T (1+B)^{t-2} + \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot G \cdot \sum_{t=1}^T (1-G)^{t-2}.$$

По аналогии с (11) найдём сумму геометрической прогрессии для $b_1 = \frac{1}{1+B}, q = 1+B \neq 1$:

$$(13) \sum_{t=1}^T (1+B)^{t-2} = \sum_{t=1}^T \frac{1}{1+B} \cdot (1+B)^{t-1} = \frac{1}{1+B} \cdot \frac{1-(1+B)^T}{1-(1+B)} = \frac{1}{1+B} \cdot \frac{(1+B)^T - 1}{B}.$$

Найдём сумму геометрической прогрессии для $b_1 = \frac{1}{1-G}, q = 1-G$. Из определения Алгоритма 1 следует, что $G \neq 0$, следовательно, $q \neq 1$. Получим:

$$(14) \sum_{t=1}^T (1-G)^{t-2} = \sum_{t=1}^T \frac{1}{1-G} \cdot (1-G)^{t-1} = \frac{1}{1-G} \cdot \frac{1-(1-G)^T}{1-(1-G)} = \frac{1}{1-G} \cdot \frac{1-(1-G)^T}{G}.$$

Подставим найденные суммы (13) и (14) в (12):

$$(15) \sum_{t=1}^T M(t-1) \approx \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot B \cdot \frac{1}{1+B} \cdot \frac{(1+B)^T - 1}{B} + \frac{X_0 \cdot (1-G) \cdot (1+B)}{B+G} \cdot G \\ \cdot \frac{1}{1-G} \cdot \frac{1-(1-G)^T}{G} =$$

$$= X_0 \cdot (1 - G) \cdot \frac{(1 + B)^T - 1}{B + G} + X_0 \cdot (1 + B) \cdot \frac{1 - (1 - G)^T}{B + G}.$$

Подставим найденные суммы (11) и (15) в (10):

$$\begin{aligned} K(T) &\approx P \cdot \frac{X_0}{B + G} \cdot ((1 - G) \cdot ((1 + B)^T - 1) + (1 + B) \cdot (1 - (1 - G)^T)) + P \cdot B \cdot X_0 \\ &\quad \cdot \frac{(1 + B)^T - 1}{B} = \\ &= P \cdot X_0 \cdot \left(\frac{1}{B + G} \cdot ((1 - G) \cdot ((1 + B)^T - 1) + (1 + B) \cdot (1 - (1 - G)^T)) + ((1 + B)^T - 1) \right) = \\ &= P \cdot X_0 \cdot \left(\frac{1 - G}{B + G} \cdot ((1 + B)^T - 1) + \frac{1 + B}{B + G} \cdot (1 - (1 - G)^T) + ((1 + B)^T - 1) \right) = \\ &= P \cdot X_0 \cdot \left(\frac{1 - G + B + G}{B + G} \cdot ((1 + B)^T - 1) + \frac{1 + B}{B + G} \cdot (1 - (1 - G)^T) \right) = \\ &= P \cdot X_0 \cdot \frac{1 + B}{B + G} \cdot ((1 + B)^T - (1 - G)^T), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 6. Число связей $K(T)$ для графа, построенного с помощью Алгоритма 1, при $T \rightarrow \infty$ бесконечно возрастает.

Доказательство.

По определению Алгоритма 1: $0 < G < 1$.

Следовательно, $0 < 1 - G < 1$ и $(1 - G)^T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Тогда при $T \rightarrow \infty$ выражение (9) можно переписать как:

$$\begin{aligned} (16) \lim_{T \rightarrow \infty} K(T) &\approx \lim_{T \rightarrow \infty} \left[P \cdot X_0 \cdot \frac{1 + B}{B + G} \cdot ((1 + B)^T - (1 - G)^T) \right] = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[P \cdot X_0 \cdot \frac{1 + B}{B + G} \cdot (1 + B)^T \right]. \end{aligned}$$

По определению Алгоритма 1, X_0, B, G, P являются заданными положительными константами:

$$X_0 > 0, B > 0, 0 < G < 1, P \in (0, 1].$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} B + G &\neq 0, \\ P \cdot X_0 \cdot \frac{1 + B}{B + G} &= const > 0, \\ 1 + B > 1 \text{ и } (1 + B)^T &\rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, выражение (16) можно переписать как:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K(T) \approx const \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} [(1 + B)^T] = \infty,$$

что и требовалось доказать.

6 Среднее число связей

Утверждение 7. Среднее число связей для графа, построенного с помощью Алгоритма 1, при $T \rightarrow \infty$ стремится к следующему пределу:

$$(17) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K(T)}{X(T)} \approx P \cdot \frac{B + 1}{B + G}.$$

Доказательство.

Для вычисления среднего числа связей (средней степени узлов) разделим общее число связей (9) на общее число узлов (2):

$$(18) \frac{K(T)}{X(T)} \approx \frac{P \cdot X_0 \cdot \frac{1 + B}{B + G} \cdot ((1 + B)^T - (1 - G)^T)}{X_0 \cdot (1 + B)^T} = P \cdot \frac{1 + B}{B + G} \cdot \frac{(1 + B)^T - (1 - G)^T}{(1 + B)^T}.$$

По определению Алгоритма 1: $0 < G < 1$.

Следовательно, $0 < 1 - G < 1$ и $(1 - G)^T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Тогда при $T \rightarrow \infty$ выражение (18) можно переписать как:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K(T)}{X(T)} \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \left[P \cdot \frac{1+B}{B+G} \cdot \frac{(1+B)^T - (1-G)^T}{(1+B)^T} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[P \cdot \frac{1+B}{B+G} \cdot \frac{(1+B)^T}{(1+B)^T} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[P \cdot \frac{1+B}{B+G} \right].$$

По определению Алгоритма 1, B, G, P являются заданными положительными константами:

$$B > 0, 0 < G < 1, P \in (0,1].$$

Отсюда следует:

$$B + G \neq 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K(T)}{X(T)} \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \left[P \cdot \frac{1+B}{B+G} \right] = P \cdot \frac{B+1}{B+G},$$

что и требовалось доказать.

7 Плотность

Утверждение 8. Плотность графа, построенного с помощью Алгоритма 1, при $T \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Доказательство.

Плотность графа $D(T)$ вычисляется как отношение общего числа связей $K(T)$ к максимальному теоретически возможному числу связей для графа с числом узлов $X(T)$:

$$D(T) = \frac{K(T)}{\frac{1}{2} \cdot X(T) \cdot (X(T) - 1)}.$$

С учётом выражений (2) и (9) получим:

$$(19) D(T) \approx \frac{P \cdot X_0 \cdot \frac{1+B}{B+G} \cdot ((1+B)^T - (1-G)^T)}{\frac{1}{2} \cdot X_0 \cdot (1+B)^T \cdot (X_0 \cdot (1+B)^T - 1)} \\ = \frac{2 \cdot P \cdot ((1+B)^T - (1-G)^T)}{(B+G) \cdot (1+B)^{T-1} \cdot (X_0 \cdot (1+B)^T - 1)}.$$

По определению Алгоритма 1: $0 < G < 1$.

Следовательно, $0 < 1 - G < 1$ и $(1 - G)^T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Тогда при $T \rightarrow \infty$ выражение (19) можно переписать как:

$$(20) \lim_{T \rightarrow \infty} D(T) \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \cdot P \cdot ((1+B)^T - (1-G)^T)}{(B+G) \cdot (1+B)^{T-1} \cdot (X_0 \cdot (1+B)^T - 1)} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \cdot P \cdot (1+B)^T}{(B+G) \cdot (1+B)^{T-1} \cdot (X_0 \cdot (1+B)^T - 1)} \right] \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \cdot P \cdot (1+B)}{(B+G) \cdot (X_0 \cdot (1+B)^T - 1)} \right].$$

По определению Алгоритма 1, X_0, B, G, P являются заданными положительными константами:

$$X_0 > 0, B > 0, 0 < G < 1, P \in (0,1].$$

Отсюда следует:

$$B + G \neq 0, \\ 2 \cdot P \cdot \frac{1+B}{B+G} = const > 0, \\ 1 + B > 1 \text{ и } (1+B)^T \rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [X_0 \cdot (1+B)^T - 1] = \infty \neq 0,$$

Следовательно, выражение (20) можно переписать как:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D(T) \approx \frac{2 \cdot P \cdot (1+B)}{(B+G)} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(X_0 \cdot (1+B)^T - 1)} \right] = const \cdot \frac{1}{\infty} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Заключение

В данной работе выведены формулы для числа узлов, числа и доли активных узлов, общего и среднего числа связей, плотности для неориентированных графов, построенных по алгоритму с отсевом (деактивацией) активных узлов с экспоненциальным ростом. Полученные результаты могут быть полезны при проведении моделирования, в частности, социальных сетей.

Литература

1. *Barabási, Albert-László*. Network science. — Cambridge University Press, 2018
2. *Dunbar R.I.M., Arnaboldi V., Conti M., Passarella A.* The structure of online social networks mirrors those in the offline world // *Social networks*, Volume 43, October 2015, pp. 39-47. <https://doi.org/10.1016/j.socnet.2015.04.005>.
3. *Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г.* Акциональная модель: о направлениях исследования социальных сетевых структур // *Материалы 10-й Всероссийской мультikonференции по проблемам управления МКПУ-2017* – С. 193-196. – <https://elibrary.ru/item.asp?id=29913598>
4. *Bell M., Perera S., Piraveenan M., Bliemer M., Latty T., Reid C.* Network growth models: A behavioural basis for attachment proportional to fitness // *Scientific reports* 7, Article number: 42431 (2017). – <https://www.nature.com/articles/srep42431>
5. *Wang Q., Du C., Geng Y., Lei S.* Historical payoff can not overcome the vaccination dilemma on Barabási–Albert scale-free networks // *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 130, January 2020, <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109453>
6. *Pachona A., Polito F., Sacerdote L.* On the continuous-time limit of the Barabási–Albert random graph // *Applied Mathematics and Computation*, Volume 378, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125177>
7. *Tremaine S.* Order–disorder phase transition in black hole star clusters – II. A scale-free cluster // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 491, Issue 2, January 2020, Pages 1941–1954, <https://doi.org/10.1093/mnras/stz3181>
8. *Shirai S., Kumar Acharya S., Kumar Bose S., Mallinson J.B.* Long-range temporal correlations in scale-free neuromorphic networks // *Network Neuroscience*, Volume 4, Issue 2, 2020, p.432-447. https://doi.org/10.1162/netn_a_00128
9. *Wei Lv, Qing Ke, Kezan Li.* Dynamical analysis and control strategies of an SIVS epidemic model with imperfect vaccination on scale-free networks // *Nonlinear Dynamics* volume 99, pages1507–1523(2020)
10. *Гилязова А.А.* О новом алгоритме построения графов, обладающих статистическими характеристиками, схожими с реальными социальными сетями // *Теория активных систем (ТАС-2014) [Электронный ресурс]: Материалы международной научно-практической конференции, 17-19 нояб. 2014 г., Москва / под общ. ред. В.Н. Буркова* — М.: ИПУ РАН, 2014. — С. 201-202. — ISBN 978-5-91450-160-7 — http://www.mtas.ru/search/search_results.php?publication_id=19832
11. *Гилязова А.А., Федянин Д.Н.* Анализ алгоритма с отсевом активных пользователей для генерации неориентированных графов со статистическими свойствами, схожими с социальными сетями // *Труды 11-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2018, Москва)*. М.: ИПУ РАН, 2018. Том 1. С. 245-251.
12. *Korkmaz G., Kuhlman C.J., Goldstein J., Vega-Redondo F.* A computational study of homophily and diffusion of common knowledge on social networks based on a model of Facebook // *Social Network Analysis and Mining* volume 10, (2020)
13. *Kumar A., Swarnakar P., Jaiswal K., Kurelec R.* SMIR model for controlling the spread of information in social networking sites // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 540, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122978>
14. *Yi-Zi Ning, Xin Liu, Hui-Min Cheng, Zhong-Yuan Zhang.* Effects of social network structures and behavioral responses on the spread of infectious diseases // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 539, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122907>
15. *Albert-László Barabási & Réka Albert.* Emergence of scaling in random networks (англ.) // *Science : journal*. — 1999. — October (vol. 286, no. 5439). — P. 509—512. — doi:10.1126/science.286.5439.509.

16. *Гилязова А.А.* Об оценке числа Данбара и его влияния на взаимодействие пользователей в социальной сети Facebook // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г.: Труды. [Электронный ресурс] — М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. — С. 6292—6300.— ISBN 978-5-91450-151-5 — Электронная версия доступна по адресу: <http://vspu2014.ipu.ru/proceedings/prcdngs/6292.pdf>
17. *Гилязова А.А., Федянин Д.Н.* Динамика графов социальных сетей, построенных по алгоритму с отсевом активных узлов / Материалы 15-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2018, Воронеж). Воронеж: ВГТУ, 2018. Том 2. С. 135-138.