

DOI:

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ ДИАГНОСТИКИ В МОДЕЛЯХ ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ: ТЕСТ ГРЕЙНЖЕРА

Бабешко Л.О.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия, г. Москва
Ленинградский проспект, д.49

L.Babeshko@fa.ru

Аннотация: Представление m -мерного VAR(p)-процесса в виде tr -мерного VAR(1)-процесса позволяет применять для оценки и прогнозирования векторной авторегрессии аппарат, разработанный для моделей авторегрессии одномерных временных рядов, а к диагностике, в частности тестирования причинно-следственных связей — тесты, включающие обобщённые статистики одномерных аналогов.

Ключевые слова: модель векторной авторегрессии, диагностические тесты, тест Грейнджера

Введение

Модели векторной авторегрессии (VAR, *vector autoregressive model*), предложенные Кристофером Симсом в 1980 г. и предназначенные для описания нескольких динамических процессов на основе их общей истории, широко используются как альтернатива сложным структурным макроэкономическим моделям благодаря их гибкости, релевантности, сопоставимости по точности, простоте реализации и экономической интерпретации результатов [1]. Модели векторной авторегрессии, с одной стороны являются обобщением авторегрессионных моделей для многомерных временных рядов, с другой — частным случаем систем одновременных уравнений, сохраняя преемственность в методах оценивания, диагностики и исследования. При построении эконометрических моделей любых типов (моделей временных рядов, регрессионных моделей с одним уравнением, систем одновременных уравнений) одним из важнейших этапов является этап проверки выполнения их предпосылок — диагностика моделей. Большинство диагностических тестов (*Diagnostic Tests*) базируется на предпосылке нормальности распределения вектора возмущений. Нарушение этой предпосылки приводит к ошибочным выводам и интерпретации результатов оценивания [2],[3].

Для проверки нормальности распределения возмущений, по крайней мере в эконометрике, широкое применение получил тест Харке-Бера (*Jarque-Bera*), реализация которого выполнена практически во всех эконометрических пакетах [4],[5],[6]. Обобщённый вариант теста используется для проверки нормальности распределения вектора возмущений модели векторной авторегрессии. Для проверки остатков модели на наличие автокорреляции применяется обобщённая процедура тестов Бокса-Пирса (*Box-Pierce Q-statistic*) и Бокса-Льюинга (*Ljung-Box Q-statistic*) — тест Портманто (*Portmanteau Test*). Для исследования *гетероскедастичности* в многомерных моделях временных рядов используются обобщённые тесты ARCH.

Поскольку в моделях векторной авторегрессии каждое отдельное уравнение представляет собой авторегрессионную модель распределённых лагов ADL(p,p), возникает вопрос тестирования причинно-следственных связей между переменными. Для этой цели в эконометрических пакетах используется тест Грейнджера, обобщённому алгоритму которого, реализованного в программной среде R и посвящена данная статья [7].

Тестирование причинности. Для формального определения лаговой структуры модели используется тест Грейнджера на причинно-следственную связь переменных. Суть теста состоит в следующем [3]: переменная X является опережающей, а Y — запаздывающей по отношению к переменной X , если для модели

$$(1) \quad Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_k Y_{t-k} + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \dots + b_k X_{t-k} + \varepsilon_t$$

нулевая гипотеза

$$(2) \quad H_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$$

отклоняется при некотором уровне значимости (X влияет на Y , и изменения X предшествуют изменениям Y). Для проверки нулевой гипотезы (2) модели (1) можно использовать, например, тесты на значимость ограничений на параметры модели: тест множителей Лагранжа, Вальда, отношения правдоподобия. Перечисленные тесты базируются на сравнении дисперсий остатков в моделях с ограничениями и без ограничений. В пакетах прикладных программ чаще используется тест Вальда, статистика которого вычисляется по правилу:

$$(3) \quad W = (e_R^T e_R - e_{UR}^T e_{UR}) / (e_{UR}^T e_{UR} / n),$$

где e_R, e_{UR} — векторы остатков модели с ограничениями и без ограничений.

В векторных моделях авторегрессии $VAR(p)$, например, для переменных, представленных в виде двух блоков: $Y_{1t} (m_1 \times 1)$, $Y_{2t} (m_2 \times 1)$, $m_1 + m_2 = m$,

$$(4) \quad \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^p \begin{pmatrix} A_{11,i} & A_{12,i} \\ A_{21,i} & A_{22,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-i} \\ Y_{2,t-i} \end{pmatrix} + CD_t + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix},$$

с автоковариационной матрицей белого шума

$$(5) \quad \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

где A_k — $(m \times m)$ -матрица коэффициентов, u_t — m -мерный вектор процесса белого шума с $(m \times m)$ -ковариационной матрицей Ω , D_t — $(M \times 1)$ -вектор столбец, включающий детерминированные регрессоры (которыми могут быть: константа, тренд, фиктивные переменные); C — $(m \times M)$ -матрица коэффициентов детерминированных регрессоров, гипотеза независимости вектора переменных Y_{1t} от вектора переменных Y_{2t} по Грейнджеру, эквивалентна гипотезе на значимость ограничений на параметры — $H_0: A_{21,i} = 0$ для $i = 1, 2, \dots, p$, альтернативная гипотеза — $\exists A_{21,i} \neq 0$ для $i = 1, 2, \dots, p$. Для проверки нулевой гипотезы (2) используется $F(p m_1 m_2, mT - n^*)$ -статистика для сравнения оценочных дисперсий возмущений длинной (*unrestricted*) и короткой (*restricted*) регрессий, где n^* — общее число параметров модели $VAR(p)$.

Тестирование мгновенного влияния переменных Y_{2t} на переменные Y_{1t} в модели (4),(5) выполняется при помощи обобщения статистики (3), которое для модели векторной авторегрессии принимает вид [7],[8]:

$$(6) \quad \lambda_W = T \hat{\sigma}' C' [2CD_m^+ (\hat{\Omega}_\varepsilon \otimes \hat{\Omega}_\varepsilon) D_m^+ C'] C \hat{\sigma} \sim \chi^2(N),$$

где D_m^+ — псевдообратная матрица Мура-Пенроуза для матрицы D_m размером $(m^2 \times 1/2 m(m+1))$, $\hat{\Omega}_\varepsilon = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t \cdot e_t'$ — оценка автоковариационной матрицы вектора остатков, $\hat{\sigma} = \text{vec}(\hat{\Omega}_\varepsilon)$, $\text{vec}(\cdot)$ — оператор формирования вектора из нижней треугольной матрицы с элементами на главной диагонали и вертикальным выстраиванием её столбцов, C — $(N \times m(m+1)/2)$ -матрица ранга N , соответствующая корреляциям между u_{1t} и u_{2t} , N — число ограничений на параметры.

Алгоритм обобщенной статистики Вальда (6) реализован в программной среде R в функции *causality()* пакета `{var}`: *causality(x, cause="Y2")*, где x — объект класса "Varest", генерируемого *VAR()* или объект класса *vec2var*; генерируемого *vec2var()*; *cause* — идентификатор переменных, влияние которых на остальные переменные $VAR(p)$ -процесса проверяется при помощи теста.

Ниже приведены скрипт и фрагмент протокола результатов оценивания и диагностики модели векторной авторегрессии $VAR(2)$ для двух эндогенных переменных: индекс реального ВВП РФ (Y), индекс реальных инвестиций в основной капитал (X). Используются квартальные данные за 9 лет (с 2009г. по 2016 г.) с сезонной коррекцией.

Фрагменты скрипта.

```
# загрузка пакетов
library(tseries); library(vars); library("AER"); library(stats)
# проверка на стационарность
adf.test(Y); adf.test(X); Dy<- diff(diff(Y)); Dx<- diff(diff(X)); adf.test(Dy); adf.test(Dx)
# оценка модели
varmat <- as.matrix(cbind(Dy,Dx)); varfit <- VAR(varmat,2,type="none",ic="AIC");summary(varfit)
#диагностика модели
serial.test(varfit, type = "PT.adjusted")# проверка остатков на автокорреляцию
arch.test(varfit, lags.single = 1,lags.multi = 1,multivariate.only=TRUE)#проверка на гетероскедастичность
```

```
normality.test(varfit, multivariate.only = FALSE) # проверка на нормальность
var.causal <-causality(varfit,cause="Dy") # тестирование причинности
```

Фрагменты протокола.

Estimation results for equation Dy:

Dy = Dy.l1 + Dx.l1 + Dy.l2 + Dx.l2

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

Dy.l1 -0.45231 0.27777 -1.628 0.1165

Dx.l1 -0.08369 0.04415 -1.896 0.0701 .

Dy.l2 0.14486 0.26062 0.556 0.5835

Dx.l2 -0.06776 0.04523 -1.498 0.1472

Residual standard error: 2.104 on 24 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.5865, Adjusted R-squared: 0.5176

F-statistic: 8.51 on 4 and 24 DF, p-value: 0.0002009

Estimation results for equation Dx:

Dx = Dy.l1 + Dx.l1 + Dy.l2 + Dx.l2

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

Dy.l1 1.4982 1.6200 0.925 0.36427

Dx.l1 -0.9995 0.2575 -3.882 0.00071 ***

Dy.l2 3.4633 1.5200 2.279 0.03189 *

Dx.l2 -0.6428 0.2638 -2.437 0.02260 *

Residual standard error: 12.27 on 24 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.6059, Adjusted R-squared: 0.5402

F-statistic: 9.225 on 4 and 24 DF, p-value: 0.0001161

Результаты тестирования

Результаты остаточного тестирования показали нормальность распределения (обобщенный тест Харке-Бера), гомоскедастичность (обобщенный тест ARCH) и наличие автокорреляции остатков модели (тест Портманто). Тестирование G-причинности и мгновенного влияния переменных модели, выполнены при помощи F-статистики и обобщенной статистики (6). Как показали результаты вычислений, нулевая гипотеза об отсутствии причинности Грейнджера не отклоняется (для зависимости Y от X: $F\text{-Test} = 2.607$, $df_1 = 2$, $df_2 = 48$, $p\text{-value} = 0.0842$; для зависимости X от Y: $F\text{-Test} = 2.0678$, $df_1 = 2$, $df_2 = 48$, $p\text{-value} = 0.1376$), в то время как гипотеза об отсутствии мгновенной причинности отклоняется (для зависимости Y от X: $Chi\text{-squared} = 9.713$, $df = 1$, $p\text{-value} = 0.002$; для зависимости X от Y: $Chi\text{-squared} = 9.7125$, $df = 1$, $p\text{-value} = 0.00183$).

Литература

1. Sims C.A. Macroeconomics and Reality. *Econometrica*//Journal of Econometrica Society. Vol.48.1980, №1. P.1-48.
2. Бабешко Л.О., Бич М.Г., Орлова И.В. Эконометрика и эконометрическое моделирование: учебник. — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2017. — 400 с.
3. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: учебник— 8-е изд. — М.: Дело, 2007. — 504 с.
4. Носко В.П. Эконометрика Кн.2. Ч.3,4: учебник. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011. — 576 с.
5. Jarque C. M., Bera A. K. A test for normality of observations and regression residuals // *International Statistical Review*. 1987, № 55, p.163–172.
6. Kleiber C., Zeileis A. *Applied Econometrics with R* —Springer, 2008. — 232 p.
7. Pfaff B. *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*. — Springer, 2008. — 189 p.
8. Айвазян С.А., Фантазиани Д. Эконометрика-2: Продвинутый курс с приложениями в финансах: учебник. — М.: Магистр: Инфра-Б, 2014. — 944 с.