DOI:

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО КОМПЛЕКСА РЕСУРСОВ ПРИ РЕГИОНАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Кононов Д.А.,
Российский государственный гуманитарный университет
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д.65
dmitrykon52@gmail.com

Фуругян М.Г.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40
rtsccas@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача планирования комплекса работ с использованием ресурсов различных типов – возобновляемых (исполнителей, которые могут различаться своей производительностью) и несколькими типами не возобновляемых. Допускается одновременное выполнение одной работы несколькими исполнителями. Разработан алгоритм нахождения оптимального распределения ресурсов и построения оптимального расписания выполнения работ.

Ключевые слова: возобновляемые ресурсы, не возобновляемые ресурсы, группа исполнителей, оптимальное расписание, сетевая модель, процедура компоновки.

Введение

При региональном управлении нередко возникают задачи распределения ресурсов и составления оптимального расписания выполнения комплекса работ. Типичными примерами являются задачи планирования и реализации проектов регионального и муниципального уровня управления, разработки и эксплуатации сложных технических систем, обработки больших массивов информации, создания систем телекоммуникации, задачи в других областях деятельности Социума. Основные проблемы при этом заключаются, во-первых, в создании математической модели, адекватной реальной исследуемой системе, и во-вторых, в расчете с помощью этой модели режима функционирования системы, в результате которого получается расписание, показывающее, когда и какой работе следует выделить те или иные ресурсы. В качестве примера можно привести успешное использование систем управления проектами МКП и ПЕРТ, с помощью которых при решении различных задач планирования, определения начальных и конечных сроков выполнения работ, связанных технологическими отношениями предшествования, оптимальным образом распределялись не возобновляемые ресурсы [1]. При этом были разработаны эффективные алгоритмы решения указанных задач.

К другому виду ресурсов, возобновляемым, относятся исполнители: работники, исполнительные механизмы, процессоры, приборы. Эти ресурсы, в отличие от не возобновляемых, могут использоваться многократно. Задачи распределения такого вида ресурсов нередко являются *NP*-трудными, и для их решения в настоящее время не известно эффективных (полиномиальных) алгоритмов. Примером могут служить задачи построения многопроцессорного расписания без прерываний. Для некоторых задач составления расписаний удается построить эффективные (существенно менее трудоемкие, чем полный перебор вариантов) методы решения. Например, это удается сделать для задачи составления многопроцессорного расписания с прерываниями без ограничений на частичный порядок выполнения работ. Отметим в этой связи работы [2–4], в которых исследованы задачи построения многопроцессорных расписаний для различных случаев в зависимости от числа и свойства процессоров, вида директивных интервалов, наличия отношений предшествования. В [5, 6] рассмотрены задачи распределения обоих видов ресурсов.

В настоящей статье рассматривается задача распределения неоднородного комплекса ресурсов, возобновляемых и не возобновляемых, при планировании работ, допускающих прерывания и переключения с одного исполнителя на другого. Доступное число исполнителей в различные моменты времени не является постоянным, а их производительности могут различаться. Авторами предложен эффективный алгоритм оптимального распределения ресурсов и построения оптимального расписания выполнения заданного комплекса работ. Алгоритм основан на построении потоковой сетевой модели и модификации процедуры компоновки.

1 Формулировка задачи

Рассматривается комплекс работ (заданий) $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$, которые могут быть выполнены с использованием возобновляемых и не возобновляемых ресурсов. Не возобновляемые ресурсы (всего их L типов) выделенные некоторому заданию, в дальнейшем использоваться не могут. Примером могут служить финансы, электроэнергия. Возобновляемые ресурсы (работники, машины, процессоры, исполнительные механизмы) могут использоваться различными работами многократно. В отличие от предыдущих публикаций авторов (в которых исполнители идентичные) предполагается, что исполнители могут иметь различные производительности. Допускается возможность прерываний и переключений с одного исполнителя на другого при выполнении заданий, причем эти действия не сопряжены с временными затратами. Не допускается одновременное выполнение одним исполнителем нескольких работ, но одновременное выполнение одной работы несколькими исполнителями допускается (при определенных ограничениях, о которых будет отмечено ниже).

Каждое задание $w_i \in W$ имеет следующие характеристики: b_i – момент готовности, f_i – директивный срок (т.е. задание w_i может выполняться только в интервале $(b_i, f_i]$), Q_i – объем (который обеспечивается исполнителями и не возобновляемыми ресурсами) .

Условия потребления ресурсов заданиями зададим следующим образом. Пусть задан горизонт планирования $(0;T]$ ($(b_i, f_i] \subseteq (0;T]$ при всех $i = \overline{1, n}$), на котором распределяются ресурсы и строится расписание выполнения работ. Не возобновляемый ресурс l-го типа выделяется работам в моменты времени τ_{kl}, имеющийся объем этого ресурса в момент τ_{kl} составляет R_{kl}, а максимальная его величина, которая может быть выделена заданию w_i в момент τ_{kl}, равна r^0_{ikl}, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, K}$, $l = \overline{1, L}$. Выделение не возобновляемого ресурса l-го типа работе w_i в момент времени τ_{kl} возможно только в том случае, если $b_i \le \tau_{kl} \le f_i - d_{ikl}$, $d_{ikl} \ge 0$ – заданная величина (т.е. на освоение этого ресурса должно быть выделено время, не меньшее d_{ikl}), $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, K}$, $l = \overline{1, L}$. Если в момент времени τ_{kl} заданию w_i выделен не возобновляемый ресурс l-го типа в количестве r_{ikl}, то это обеспечивает объем работы по выполнению данного задания, равный $c_{kl} r_{ikl}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, K}$, $l = \overline{1, L}$, где $c_{kl} > 0$ – заданные величины. При этом должны быть выполнены ограничения:

$$(1) \qquad r_{ikl} \le r^0_{ikl},\ i = \overline{1, n},\ k = \overline{1, K},\ l = \overline{1, L},$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} r_{ikl} \le R_{kl},\ k = \overline{1, K},\ l = \overline{1, L}.$$

Выполнение задания с помощью не возобновляемых ресурсов не зависит от его выполнения с помощью других видов ресурсов и от выполнения других работ.

Каждой работе w_i в любой момент времени $t \in (b_i; f_i]$ может быть выделено некоторое число исполнителей, которые могут использоваться ею некоторый интервал времени. Заданы временные интервалы $\bar{I}_s = (t_{s-1}, t_s]$, $s = \overline{1, S}$, где $0 = t_0 < t_1 ... < t_{S-1} < t_S = T$. В интервале $\bar{I}_s$, $s = \overline{1, S}$, число доступных исполнителей составляет h_s, их производительности равны $P^s_1 \ge P^s_2 \ge ... \ge P^s_{h_s}$, а $M_s = \sum_{j=1}^{h_s} P^s_j$ – их суммарная производительность. Если исполнитель с производительностью P^s_j выполняет некоторое задание в течение интервала времени δ, то объем его работы при этом составляет $P^s_j \delta$. Допускается одновременное выполнение одного задания несколькими исполнителями. Однако, в фиксированный момент времени $t \in \bar{I}_s$ суммарная производительность исполнителей, выполняющих задание w_i, не должна превосходить величины m^0_{is}, $i = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, S}$. Если в момент времени $t \in \bar{I}_s$ работа w_i поручена исполнителям с суммарной производительностью m_{is}, то должны выполняться следующие ограничения:

$$(3) \qquad m_{is} \le m_{is}^0,\ i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,S},$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} m_{is} \le M_s,\ s=\overline{1,S}.$$

Если заданию w_i на интервале $D_s \subseteq \overline{I_s}$ длиной δ выделено несколько исполнителей с суммарной производительностью m_{is}, то объем работы, выполненный ими на этом интервале времени, составляет $m_{is}\delta$, $i=\overline{1,n}$, $s=\overline{1,S}$.

Распределение ресурсов, а также соответствующее ему расписание выполнения работ W указывают для каждой работы $w_i \in W$, $i=\overline{1,n}$, и каждого момента времени $t \in (0,T]$, какие исполнители выполняют ее, а для каждого момента времени τ_{kl}, $k=\overline{1,K}$, $l=\overline{1,L}$, определяют количество не возобновляемых ресурсов всех типов, выделенное ей. При этом должны выполняться ограничения (1) - (4).

Распределение ресурсов, при котором каждое задание $w_i \in W$, $i=\overline{1,n}$, полностью выполняется (т.е. суммарный объем работ, предоставленный ему обоими видами ресурсов, составляет Q_i) в своем директивном интервале при соблюдении ограничений (1) - (4), будем называть оптимальным (в широком смысле), а соответствующее расписание – оптимальным расписанием.

Требуется определить, существуют ли оптимальное распределение ресурсов и соответствующее расписание. Если они существуют, то найти их.

2 Моделирование процесса распределения ресурсов

Пусть интервалы I_j, $j=\overline{1,p}$, получены всевозможными пересечениями интервалов $\bar{I}_s$, $s=\overline{1,S}$, и $(b_i, f_i]$, $i=\overline{1,n}$, и пусть δ_j – длина интервала I_j. Отметим, что при всех $j=\overline{1,p}$, $i=\overline{1,n}$ либо $I_j \subseteq (b_i, f_i]$, либо $I_j \cap (b_i, f_i] = \varnothing$, а также что при всех $j=\overline{1,p}$, $s=\overline{1,S}$ либо $I_j \subseteq \bar{I}_s$, либо $I_j \cap \bar{I}_s = \varnothing$. Кроме того, если $I_j \subseteq \bar{I}_s$, то число h_j исполнителей, доступных в интервале I_j, равно h_s, их производительности P_j равны P_j^s, $j=\overline{1,h_s}$, соответственно, их суммарная производительность M_j равна M_s, а максимальная суммарная производительность m_{ij}^0 исполнителей, которые могут одновременно выполнять работу w_i в момент времени $t \in I_j$, равна m_{is}^0.

Построим потоковую сеть $G=(V,A)$, где $V=\{u, v, I_j, j=\overline{1,p}, \tau_{kl}, k=\overline{1,K}, l=\overline{1,L}, w_i, i=\overline{1,n}\}$ – множество узлов, u – источник, v – сток, $A=\{(u,I_j), j=\overline{1,p}, (u,\tau_{kl}), k=\overline{1,K}, l=\overline{1,L}, (I_j, w_i), j=\overline{1,p}, i=\overline{1,n}, (\tau_{kl}, w_i), k=\overline{1,K}, i=\overline{1,n}, l=\overline{1,L}, (w_i, v), i=\overline{1,n}\}$ – множество ориентированных дуг. Дуги (I_j, w_i) и (τ_{kl}, w_i) включаются в сеть G в том и только том случае, если выполнены условия $I_j \subseteq (b_i, f_i]$ и $b_i \le \tau_{kl} \le f_i - d_{ikl}$ соответственно. Пропускные способности следующие: $U(u,I_j)=\delta_j M_j$, $U(u,\tau_{kl})=c_{kl}R_{kl}$; $U(I_j,w_i)=\delta_j m_{ij}^0$; $U(\tau_{kl},w_i)=c_{kl}r_{ikl}^0$; $U(w_i,v)=Q_i$.

Будем рассматривать поток g в сети G. Величину потока g по дуге $(a,b)\in A$ будем обозначать как $g(a,b)$. Физическая интерпретация величины потока по дугам сети G следующая: $g(u,I_j)$ — суммарный объем работы исполнителей, предоставляемый заданиям в интервале I_j; $g(u,\tau_{kl})$ — объем работы, предоставляемый заданиям в момент времени τ_{kl} с использованием не возобновляемого ресурса l-го типа; $g(I_j,w_i)$ — объем работы, выполненной заданием w_i в интервале I_j с помощью исполнителей; $g(\tau_{kl},w_i)$ — объем работы, выполненный заданием w_i с использованием не возобновляемого ресурса l-го типа, предоставленного ему в момент времени τ_{kl}; $g(w_i, v)$ — суммарный объем работы, выполненной заданием w_i с использованием всех ресурсов.

3 Необходимое и достаточное условие существования оптимального распределения ресурсов

Приводимый ниже алгоритм решения исходной задачи основан на следующем утверждении, которое является обобщением соответствующего утверждения в [1].

Л е м м а. Для существования оптимального распределения ресурсов необходимо и достаточно существования потока g в сети G, для которого

$$g(w_i, v) = Q_i \tag{5}$$

при всех $i = \overline{1, n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Достаточность. Предположим, что в сети G существует поток g, для которого выполнены равенства (5). Тогда

$$g(I_j, w_i) \le m_{ij}^0 \delta_j, \tag{6}$$

$$g(u, I_j) \le M_j \delta_j \tag{7}$$

при всех $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$. Кроме того, в силу сохранения потока в узлах I_j при всех $j = \overline{1, p}$ справедливы равенства

$$g(u, I_j) = \sum_{i=1}^{n} g(I_j, w_i). \tag{8}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} g(I_j, w_i) \le M_j \delta_j \tag{9}$$

при всех $j = \overline{1, p}$. Из (6), (9) следует, что если рассматривать величину $g(I_j, w_i)$ как объем работы исполнителей по выполнению задания w_i в интервале I_j, то будут выполнены приводимые в разд. 4 необходимые и достаточные условия существования допустимого распределения возобновляемого ресурса в интервале I_j (т.е. распределения, при котором заданию w_i предоставляется объем работы исполнителей, равный $g(I_j, w_i)$). Это распределение находится с помощью алгоритма компоновки (приводимого в разд. 4) для каждого $j = \overline{1, p}$ с параметрами W, I_j, δ_j, h_j, $P_1, ..., P_{h_j}, M_j$, m_{ij}^0, и $q_{ij} = g(I_j, w_i)$.

Далее, $g(\tau_{kl}, w_i) \le c_{kl} r_{ikl}^0$ при всех $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, K}$, $l = \overline{1, L}$. Следовательно, при некоторых $r_{ikl} \le r_{ikl}^0$ выполнено равенство $g(\tau_{kl}, w_i) = c_{kl} r_{ikl}$, т.е. $c_{kl} r_{ikl} \le c_{kl} r_{ikl}^0$ и выполнено неравенство (1). Далее, $g(u, \tau_{kl}) \le c_{kl} R_{kl}$ при всех $k = \overline{1, K}$, $l = \overline{1, L}$. В силу сохранения потока в узлах τ_{kl} справедливы равенства $g(u, \tau_{kl}) = \sum_{i=1}^{n} g(\tau_{kl}, w_i)$ при всех $k = \overline{1, K}$, $l = \overline{1, L}$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} c_{kl} r_{ikl} \le c_{kl} R_{kl}$, т.е. выполнено неравенство (2). Это доказывает существование в каждый момент времени τ_{kl}, $k = \overline{1, K}$, $l = \overline{1, L}$, такого распределения не возобновляемого ресурса l-го типа в количестве, не превосходящем R_{kl}, при котором каждому заданию w_i, $i = \overline{1, n}$, выделяется r_{ikl} единиц этого ресурса, что обеспечивает объем работы, равный $g(\tau_{kl}, w_i) = c_{kl} r_{ikl}$. В силу сохранения потока в узлах w_i, $i = \overline{1, n}$, справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{p} g(I_j, w_i) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} g(\tau_{kl}, w_i) = g(w_i, v),$$

а из (5) следует, что

$$\sum_{j=1}^{p} g(I_j, w_i) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} g(\tau_{kl}, w_i) = Q_i,$$

т.е. каждое задание w_i, $i=\overline{1,n}$, выполнено полностью. Кроме того, структура сети G такова, что каждое задание выполняется в своем директивном интервале. Это доказывает существование оптимального распределения ресурсов.

2) Необходимость. Пусть существует оптимальное распределение ресурсов, т.е. каждому заданию w_i, $i=\overline{1,n}$, в интервале I_j, $j=\overline{1,p}$, предоставляется объем работы исполнителей, равный q_{ij}, $q_{ij} \le m_{ij}^0 \delta_j$, при выполнении неравенств (3), (4), и, кроме того, в моменты τ_{kl}, $k=\overline{1,K}$, $l=\overline{1,L}$, выделяется не возобновляемый ресурс l-го типа в количестве r_{ikl}, обеспечивающим объем работы, равный $c_{kl}r_{ikl}$, при выполнении неравенств (1), (2). Поскольку при указанном распределении ресурсов все задания выполняются полностью, то

$$\sum_{j=1}^{p} q_{ij} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} c_{kl} r_{ikl} = Q_i \tag{10}$$

при всех $i=\overline{1,n}$. Определим поток g в сети G следующим образом:

$$g(I_j, w_i) = q_{ij},\ i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,p},$$

$$g(u, I_j) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij},\ j=\overline{1,p},\ l=\overline{1,L},$$

$$g(\tau_{kl}, w_i) = c_{kl} r_{ik},\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,K},$$

$$g(u, \tau_{kl}) = \sum_{i=1}^{n} c_{kl} r_{ikl},\ k=\overline{1,K},\ l=\overline{1,L},$$

$$g(w_i, v) = \sum_{j=1}^{p} q_{ij} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} c_{kl} r_{ikl},\ i=\overline{1,n}.$$

При этом условие сохранения потока выполняется в каждом внутреннем узле сети G, т.е. в узлах $I_j,\ j=\overline{1,p},\ \tau_{kl}, k=\overline{1,K},\ l=\overline{1,L},\ w_i, i=\overline{1,n}$. Кроме того,

$$g(I_j, w_i) = q_{ij} \le m_{ij}^0 \delta_j,\ i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,p},$$

$$g(u, I_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\delta_j = \delta_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \le \delta_j M_j,\ j=\overline{1,p},\ \textit{(в силу (4))},$$

$$g(\tau_{kl}, w_i) = c_{kl} r_{ikl} \le c_{kl} r_{ikl}^0,\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,K},\ l=\overline{1,L},$$

$$g(u, \tau_{kl}) = \sum_{i=1}^{n} c_{kl} r_{ikl} = c_{kl} \sum_{i=1}^{n} r_{ikl} \le c_{kl} R_{kl},\ k=\overline{1,K},\ l=\overline{1,L},\ \textit{(в силу (2))},$$

т.е. выполнены ограничения сверху на потоки по дугам (I_j, w_i), (u, I_j), (τ_{kl}, w_i), (u, τ_{kl}), $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,p}$, $k=\overline{1,K}$, $l=\overline{1,L}$, сети G. Далее,

$$g(w_i, v) = \sum_{j=1}^{p} q_{ij} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} c_{kl} r_{ikl} = Q_i,\ i=\overline{1,n},$$

в силу (10), т.е. выполнено равенство (5). Лемма доказана.

4 Процедура компоновки

Данная процедура позволяет распределить исполнителей между заданиями в интервале I_j. Она является обобщением алгоритма упаковки [1] на случай, когда допускается одновременное выполнение одного задания несколькими машинами. Входными параметрами процедуры являются W, I_j δ_j, $h_j, P_1, ..., P_{h_j}, M_j, m_{ij}^0, a_j$ и q_{ij} – объем работы исполнителей, который требуется предоставить заданию w_i в интервале I_j , $1 \le i \le n$; $1 \le j \le p$. В результате работы алгоритма находится распределение исполнителей на интервале I_j. Будем предполагать, что выполнены условия

$$(11) \qquad q_{ij} \le m_{ij}^0 \delta_j,\ i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, p},$$

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \le M_j \delta_j,\ j = \overline{1, p}.$$

Мы также покажем, что неравенства (11), (12) являются необходимыми и достаточными условиями существования допустимого распределения исполнителей на интервале I_j (т.е. распределения, при котором заданию w_i предоставляется объем работы исполнителей, равный q_{ij}). Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, то допустимого распределения исполнителей на интервале I_j не существует, поскольку $m_{ij}^0 \delta_j$ и $M_j \delta_j$ – это максимальный объем работы исполнителей на интервале I_j, который может быть предоставлен заданию w_i и совокупности заданий W соответственно. Поэтому выполнение неравенств (11), (12) является необходимым условием существования допустимого распределения исполнителей на интервале I_j. Достаточность следует из описанной ниже процедуры.

Процедура компоновки.

1) Если $q_{1j} \le P_1 \delta_j$, то задание w_1 выполнять первым исполнителем в интервале $(x_{j-1};\ x_{j-1} + q_{1j} / P_1]$; положить $\tau = x_{j-1} + q_{1j} / P_1$; $l = 1$.

2) Если $q_{1j} > P_1 \delta_j$, то положить m_0 равным такому натуральному числу, что $q_{1j} > \delta_j \sum_{j=1}^{m_0} P_j$, $q_{1j} \le \delta_j \sum_{j=1}^{m_0+1} P_j$, задание w_1 выполнять исполнителями 1, …, m_0 в интервале $(x_{j-1}; x_{j-1} + \delta_j]$ и исполнителем (m_0 + 1) в интервале $(x_{j-1}; x_{j-1} + (q_{1j} - \delta_j \sum_{j=1}^{m_0} P_j) / P_{m_0+1}]$. Положить $\tau = x_{j-1} + (q_{1j} - \delta_j \sum_{j=1}^{m_0} P_j) / P_{m_0+1}]$ $l = m_0 + 1$.

Пусть задания w_i, $i = \overline{1, k-1}$, $k \ge 2$, уже назначены исполнителям и вычислены значения τ и l. Назначить задание w_k исполнителю следующим образом.

3) Если $q_{kj} \le P_l (x_{j-1} + \delta_j - \tau)$, то задание w_k выполнять исполнителем l в интервале $(\tau; \tau + q_{kj} / P_l]$. Положить $\tau = \tau + q_{kj} / P_l$.

4) Если $q_{kj} > P_l (x_{j-1} + \delta_j - \tau)$, то вычислить m_0 равным такому натуральному числу, что $q_{kj} > P_l (x_{j-1} + \delta_j - \tau) + \delta_j \sum_{j=1}^{m_0} P_{l+j}$, но $q_{kj} \le P_l (x_{j-1} + \delta_j - \tau) + \delta_j \sum_{j=1}^{m_0+1} P_{l+j}$. Далее, задание w_k выполнять исполнителем l в интервале $(\tau; x_{j-1} + \delta_j]$, исполнителями $l+1, ..., l+m_0$ в интервале $(x_{j-1}; x_{j-1} + \delta_j]$ и исполнителем $(l + m_0 + 1)$ в интервале $(x_{j-1}; x_{j-1} + (q_{kj} - (x_{j-1} + \delta_j - \tau) P_l - \delta_j \sum_{j=l+1}^{l+m_0} P_j) / P_{l+m_0+1}]$; положить $\tau = x_{j-1} + (q_{kj} - (x_{j-1} + \delta_j - \tau) P_l - \delta_j \sum_{j=l+1}^{l+m_0} P_j) / P_{l+m_0+1}$; $l = l + m_0 + 1$.

Поясним работу алгоритма. Шаги 1, 2 описывают выполнение задания w_1. Шаг 1 соответствует случаю, когда задание w_1 может быть полностью выполнено первым исполнителем на интервале I_j. В противном случае выполняется шаг 2, на котором определяется требуемое число исполнителей (m_0+1). Шаг 3 соответствует случаю, когда очередное задание w_k может быть выполнено исполнителем, которая частично была занята выполнением предыдущего задания w_{k-1}, а на шаге 4 описан случай, когда для выполнения задания w_k требуются еще и другие исполнители.

Замечание. Из описания процедуры следует, что суммарная производительность исполнителей, одновременно выполняющих работу w_i, не превосходит $\lceil q_{ij}/\delta_j \rceil$, где ($\lceil a \rceil = \min\{b \geq a,\ b -$ целое$\}$, а из неравенства (11) следует, что эта величина не превосходит m_{ij}^0. Неравенство (12) гарантирует, что суммарная производительность исполнителей, используемых в интервале I_j, не превосходит M_j.

Определим вычислительную сложность процедуры компоновки. Для каждой работы $w_i,\ 1 \leq i \leq n,$ в интервале I_j выполняется $O(m_{ij}^0)$ операций сложения, вычитания, сравнения и деления. Следовательно, вычислительная сложность процедуры компоновки составляет $O(nm)$, где $m = \max\limits_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p}} m_{ij}^0.$

5 Алгоритм решения исходной задачи

Теперь перейдем к описанию алгоритма решения исходной задачи.

1) Построить потоковую сеть G.

2) Найти в сети G максимальный поток g.

3) Если выполнено условие (5) при всех $i=\overline{1,n}$, то оптимальное распределение ресурсов существует. Величина $g(I_j, w_i)$ потока g по дуге (I_j, w_i) равна объему работы исполнителей по выполнению задания w_i в интервале I_j, $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p}.$ Распределение исполнителей по заданиям в каждом интервале I_j строится с помощью процедуры компоновки. Величина $g(\tau_{kl}, w_i)$ потока g по дуге (τ_{kl}, w_i) равна объему не возобновляемого ресурса l-го типа, выделяемого заданию w_i в момент времени $\tau_{kl},\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,K},\ l=\overline{1,L}.$

4) Если условие (5) не выполнено хотя бы для одного $i,\ 1 \leq i \leq n,$ то оптимального распределения ресурсов не существует.

Поясним шаг (4) алгоритма. Если для максимального потока g условие (5) не выполнено хотя бы при одном $i,\ 1 \leq i \leq n,$ то оно не выполнено ни для какого другого потока. Действительно, предположим, что условие (5) выполнено для некоторого потока $\bar{g}$ при всех $i=\overline{1,n}.$ Тогда величина потока $\bar{g}$ через разрез $C=\{u, I_j,\ j=\overline{1,p},\ \tau_{kl},\ k=\overline{1,K},\ l=\overline{1,L},\ w_i,\ i=\overline{1,n}\} \cup \{v\}$ равна величине этого разреза. Следовательно, по теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе [7] поток $\bar{g}$ является максимальным, а разрез C – минимальным. Но величина потока g через разрез C меньше величины этого разреза. Следовательно, поток g не может быть максимальным. Полученное противоречие обосновывает шаг (4) алгоритма.

Определим вычислительную сложность предложенного алгоритма. Построение сети G (шаг 1) требует $O((p+KL)n)$ операций. Сложность нахождения максимального потока в сети G (шаг 2) (например, с помощью алгоритма Карзанова) составляет $O((p+K+L+n)^3)$, а проверка условия (5) и применение обобщенного алгоритма упаковки для одного интервала $I_j,\ 1 \leq j \leq p,$ требует $O(nm)$ операций. Следовательно, вычислительная сложность предложенного алгоритма составляет $O((p+K+L+n)^3+pnm)$ операций сложения, вычитания, сравнения и деления.

Заключение

Исследована задача построения расписания с прерываниями при наличии двух типов ресурсов, используемых для выполнения работ – возобновляемых (исполнителей, которые могут иметь различные производительности) и не возобновляемых. Работы характеризуются директивными интервалами и объемами. Допускается одновременное выполнение одной работы несколькими машинами. Разработан полиномиальный алгоритм нахождения оптимального распределения ресурсов и построения оптимального расписания, основанный на сведении исходной задачи к задаче о максимальном потоке в сети специального вида и модификации алгоритма упаковки.

Литература

1. *Филипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
2. *Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
3. *Gonzales T., Sahni S.* Preemptive Scheduling of Uniform Processor Systems // J. Association for Computing Machinery. Vol. 25. 1978, № 1. – P. 92-101.
4. *Federgruen A., Groenevel H.* Preemptive Scheduling of Uniform Machines by Ordinary Network Flow Technique // Management Science. Vol. 32. 1986, № 3. – P. 341-349.
5. *Фуругян М.Г.* Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом // АиТМ. 2015, № 3. – С. 144-150.
6. *Кононов Д.А., Фуругян М.Г.* Эффективное управление региональными проектами: распределение ресурсов и директивное планирование. Материалы двенадцатой международной конференции “Управление развитием крупномасштабных систем. MLSD'2019. (1–3 октября 2019 г., Москва, Россия). – С. 811-813.
7. *Корте Б., Фиген Й*. Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: МЦНМО, 2015. – 719 с.
8. *Kononov D., Furugyan M*. Control of a Complex of Works in Multiprocessor Real-time ACS / Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA2019, Lipetsk). – Липецк: ЛГТУ, 2019. P. https://ieeexplore.ieee.org/document/8947570.
9. *Kononov D., Furugyan M* Effective Management of Regional Projects Resources / Proceedings of the 12th International Conference "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). – M.: IEEE, 2019. P. 1-5 https://ieeexplore.ieee.org/document/8910972.