

DOI:

УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ МНОГОМЕРНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ ФИЛЬТРОМ КАЛМАНА

Масаев С.Н.

Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск, ул. Свободный проспект д.79
Smasaev@sfu-kras.ru

Аннотация: Рассматривается управление многомерным динамическим объектом через фильтр Калмана. Объект представлен как динамическая система из множества элементов с линейными зависимостями. В рассматриваемой динамической системе управление через фильтр Калмана возможно теоретически, но на практике невозможно выполнить точную оценку ковариационной матрицы ошибки.

Ключевые слова: теория управления, динамическая система, фильтр Калмана, производственная система, корреляция, граф, PMBOK, HR, TQM.

Введение

Оптимальное линейное оценивание, фильтр Калмана [1], предложен в начале 1960 г. для авионавигации. Далее его использовали в других областях: экономика, биология, метеорология, спутниковая геодезическая съемка, телекоммуникации, связь и т.д.

Фильтр Калмана является разновидностью рекурсивных фильтров. Для вычисления оценки состояния системы на текущий такт работы и ему необходима оценка состояния (в виде оценки состояния системы и оценки погрешности определения этого состояния) на предыдущем такте работы и измерения на текущем такте. Данное свойство отличает его от пакетных фильтров, требующих в текущий такт работы знание истории измерений и/или оценок.

Появление этого фильтра дало толчок разработке численной эффективной его реализации, которая повышают его точность: фильтр Поттера [2], модифицированное разложение Холецкого [3-6], алгоритм Дж. Бирмана [3].

Фильтр Калмана играет важное значение в теории управления для изучения поведения динамических объектов, так как она напрямую связана с изучением состояния объектов наблюдения методами и подходами: моделями Маркова, моделями линейной регрессии (OLS), моделями регрессии на бинарных переменных, авторегрессионной моделью, системой одновременных уравнений (SEM), моделью линейной вероятности (LPM), логит моделью (Logit), пробит моделью (Probit).

Цель настоящей работы: применить фильтр Калмана для прогнозирования состояния многомерной динамической системы интегральным показателем.

Для достижения цели необходимо выполнить задачи:

- формализовать пространство изучаемого объекта (предприятие) как линейную динамическую систему,
- выполнить внедрение на реальном объекте исследования,
- использовать фильтр Калмана для прогнозирования состояния объекта исследования.

Управлением экономическими объектами и их оптимальным управлением занимались ряд известных ученых: Р. Солоу, П. Дуглас [7], Ч. Кобб [7], К. Эрроу, В. В. Леонтьев [8], С. А. Айвазян, И. В. Елохова, Г. Б. Клейнер, Л. В. Канторович, В. С. Немчинов, А. Г. Аганбегян, А. Г. Гранберг, В. Ф. Кротов [9], и др.

Основная идея статьи в том, чтобы выполнить некоторую коррекцию входа (упростить), чтобы не усложнять работу фильтра Калмана.

В статье динамическая дискретная система нестационарная по возможному изменению размерности в моменты t .

Для анализа динамической системы перейдем к методике исследования.

1 Методика исследования

Далее под записью $x_{n|m}$ будем понимать оценку истинного вектора x в момент n с учетом измерений с момента начала работы и по момент m включительно.

Состояние фильтра задается двумя переменными:

$x_{k|k}$ — апостериорная оценка состояния объекта в момент k полученная по результатам наблюдений вплоть до момента k включительно (в русскоязычной литературе часто обозначается x_k , где $\hat{}$ означает «оценка», а k — номер такта, на котором она получена);

$P_{k|k}$ — апостериорная ковариационная матрица ошибок, задающая оценку точности полученной оценки вектора состояния и включающая в себя оценку дисперсий погрешности вычисленного состояния и ковариации, показывающие выявленные взаимосвязи между параметрами состояния системы (в русскоязычной литературе часто обозначается D_k).

Каждая итерация фильтра Калмана делится на две фазы: экстраполяция (прогноз) и коррекция. Во время экстраполяции фильтр получает предварительную оценку состояния системы $x_{k|k-1}$ (в русскоязычной литературе часто обозначается x_k , где $\tilde{}$ означает «экстраполяция», а k — номер такта, на котором она получена) на текущий шаг по итоговой оценке состояния с предыдущего шага (либо предварительную оценку на следующий такт по итоговой оценке текущего шага, в зависимости от интерпретации). Эту предварительную оценку также называют априорной оценкой состояния, так как для её получения не используются наблюдения соответствующего шага. В фазе коррекции априорная экстраполяция дополняется соответствующими текущими измерениями для коррекции оценки. Скорректированная оценка также называется апостериорной оценкой состояния, либо просто оценкой вектора состояния x_k . Обычно эти две фазы чередуются: экстраполяция производится по результатам коррекции до следующего наблюдения, а коррекция производится совместно с доступными на следующем шаге наблюдениями, и т. д. Однако возможно и другое развитие событий, если по некоторой причине наблюдение оказалось недоступным, то этап коррекции может быть пропущен и выполнена экстраполяция по нескорректированной оценке (априорной экстраполяции). Аналогично, если независимые измерения доступны только в отдельные такты работы, всё равно возможны коррекции (обычно с использованием другой матрицы наблюдений H_k).

2 Порядок расчета экстраполяции

Выполнить экстраполяцию (предсказание) вектора состояния системы по оценке вектора состояния и примененному вектору управления с шага $(k-1)$ на шаг k :

$$(1) \quad x_{k|k-1} = F_k x_{k-1|k-1} + B_k u_k$$

Рассчитать ковариационную матрицу для экстраполированного вектора состояния:

$$(2) \quad P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k$$

Выполнение расчета коррекции

Рассчитать отклонение полученного на шаге k наблюдения от наблюдения, ожидаемого при произведенной экстраполяции:

$$(3) \quad y_k = z_k - H_k x_{k|k-1}$$

Рассчитать ковариационную матрицу для вектора отклонения (вектора ошибки):

$$(4) \quad S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$$

Получить оптимальную по Калману матрицу коэффициентов усиления, формирующаяся на основании ковариационных матриц, имеющейся экстраполяции вектора состояния и полученных измерений (посредством ковариационной матрицы вектора отклонения):

$$(5) \quad K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1}$$

Рассчитать коррекцию ранее полученной экстраполяции вектора состояния — получение оценки вектора состояния системы:

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k y_k$$

Расчет ковариационной матрицы оценки вектора состояния системы:

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

Выражение для ковариационной матрицы оценки вектора состояния системы справедливо только при использовании приведенного оптимального вектора коэффициентов. В общем случае это выражение имеет более сложный вид.

3 Инварианты

Если модель абсолютно точна и абсолютно точно заданы начальные условия $x_{0|0}$ и $P_{0|0}$, то следующие величины сохраняются после любого количества итераций работы фильтра — являются инвариантами:

Математические ожидания оценок и экстраполяций вектора состояния системы, матрицы ошибок являются нуль-векторами:

$$E[x_k - x_{k|k}] = E[x_k - x_{k|k-1}] = 0$$

$$E[y_k] = 0$$

где $E[\zeta]$ — математическое ожидание ζ .

Расчетные матрицы ковариаций экстраполяций, оценок состояния системы и вектора ошибок совпадают с истинными матрицами ковариаций:

$$(6) \quad P_{k|k} = \text{cov}(x_k - x_{k|k})$$

$$P_{k|k-1} = \text{cov}(x_k - x_{k|k-1})$$

$$S_k = \text{cov}(y_k)$$

Исходными данными для работы фильтра Калмана будет экономический объект (предприятие), характеризуемый линейным уравнением:

$$(7) \quad y(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t),$$

$T = \{t: t=1, \dots, T_{max}\}$ - множество моментов времени (месяцев).

$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ - N - вектор параметра, где $x_N(t)$ значение параметра n затрат/доходов в момент t пространства X .

Существует некоторый g регламент планирования распределения доступных ресурсов на функции, характеризующиеся x^* , для подсистемы на основе значений прошлых периодов x_i , тогда $x = g(x^*)$ с

критерием $X_i^*(t) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n T X^{*i} \rightarrow \max$.

Функция планирования $x^*(t)$ выполняется по прошлым экономическим показателям с лагом l периодов $x(t) = p(x(t-l), \varepsilon(t))$, если $\varepsilon(t)$ - ошибка равна 0, то план равен факту $x^*(t) = x(t)$.

$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t)]^T$ - M - вектор управления, где $u_i(t)$ - управляющие воздействия в момент t .

$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_K(t)]^T$ - K - вектор наблюдений, где $y_i(t)$ наблюдаемые значения в момент t .

$v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_K(t)]^T$ - помеха, действующая на $x_i(t)$ или иные известные факторы на которые мы не можем влиять.

$A = [a_{ij}]$ - $N \times N$ - матрица, определяющая скорость развития системы, за счет использования ресурсов.

a_{ij} - степень влияния параметров друг на друга x_i на x_j .

$B = [b_{ij}]$ - $N \times M$ - матрица определяющая развитие системы, при $u_i(t)$. b_{ij} - степень влияния управляющего воздействия $u_j(t)$ на развитие j -го параметра подсистемы $x_j(t)$.

$H = [h_{ij}]$ - $K \times N$ - матрица наблюдений, позволяющая получить оценку $y_j(t)$ по фактическому уровню $x_j(t)$ через функцию наблюдения $\psi(t) = H(t)x(t)$.

Далее необходимо рассчитать интегральный показатель G_i , через который мы будем прогнозировать состояние системы. Представим предприятие, как дискретную динамическую систему $S = \{T, X\}$ с рассматриваемыми параметрами временных рядов $x_n^i(t-k)$, k - глубина анализа.

$$(8) \quad X_k(t) = \begin{bmatrix} x^T(t-1) \\ x^T(t-2) \\ \dots \\ x^T(t-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1(t-1) & x_2^1(t-1) & \dots & x_n^1(t-1) \\ x_1^2(t-2) & x_2^2(t-2) & \dots & x_n^2(t-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^i(t-k) & x_2^i(t-k) & \dots & x_n^i(t-k) \end{bmatrix}$$

Далее вычислим коэффициенты взаимной корреляции между значениями параметров, характеризующих состояние системы за весь рассматриваемый период. Для этого необходимо рассчитать корреляционную матрицу $R_k(t)$.

$$(9) \quad R_k(t) = \frac{1}{k-1} X_k^{\circ T}(t) X_k^{\circ}(t) = \|r_{ij}(t)\| \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где r_{ij} - коэффициенты корреляции.

$$(10) \quad r_{ij}(t) = \frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^k x^i(t-l) x^j(t-l).$$

В силу введенных обозначений (2), (3) диагональные элементы матрицы $R_k(t)$ равны единице, а остальные элементы находятся в диапазоне от -1 до +1 ($-1 \leq r_{ij} \leq 1$). Данная матрица (8) позволяет определить момент t в котором произошло изменение правил группировки и фиксации значений $x(t)$.

$$(11) \quad G_i^{\text{сумм_общ}}(t) = \sum_{j=1}^n |r_{ij}(t)| : (|r_{ij}(t)| \geq r_{\text{кр}}).$$

где $r_{\text{кр}}$ - критическое значение коэффициента корреляции при данной глубине анализа k . Интегральный показатель всей системы i -го предприятия.

$$(12) \quad G_i = \sum_{i=1}^n G_i^{\text{сумм_общ}}(t).$$

По результату расчета Формулу (6) отобразим графом см. рис. 1.

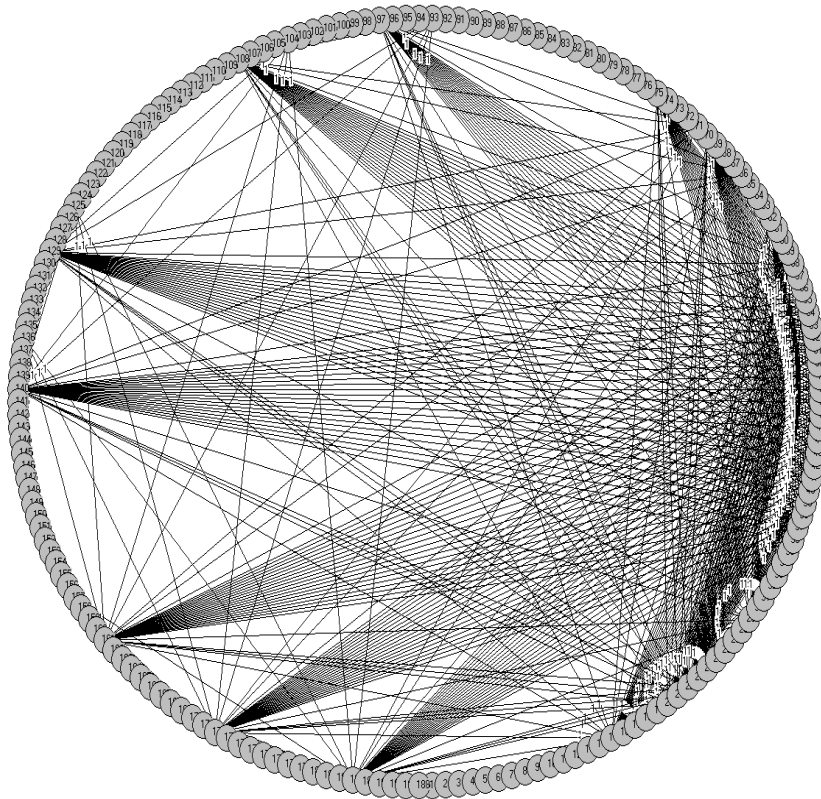


Рис. 1. Корреляционный граф

Тогда интегральный показатель G_i характеризует состояние пространства X и тем самым характеризует состояние изучаемого объекта исследования с учетом влияния параметров внешней среды.

4 Описание объекта исследования

В качестве объекта для исследования используются строительное предприятие, созданное в 2002 году. С 2002 года, в начале своей деятельности, предприятие занимается предоставлением площадей в аренду. С 2004 года и реализацией проекта строительства нового жилого района.

В 2006 году на предприятии внедрена электронная информационная система поддержки принятия управленческих решений для анализа его деятельности.

Необходимость использования данного предприятия, в качестве примера обусловлена тем, что необходимо зафиксировать изменения состояния системы от изменения параметров характеризующих результат применения управляющих действий на выполняемые работы в реально действующем экономическом объекте. Необходимо понять, возможно-ли принципиально достичь эффективного децентрализованного управления с участием человека. На данном объекте уже были определены: границы пространства системы, матрицы, определяющие структуру пространства данных и пространства управляющих воздействий, возможность применения интегрального показателя для оценки состояния экономического объекта и оценка им качества управляющих воздействий.

Параметры доходов и расходов ресурсов x_i за счет особенностей структуры данных учитываемых в матрице A :

- Собственники проекта: характеристика ролей и доли финансирования в проекте.
- Параметры выпускаемой продукции: характеристика изготавливаемой продукции и/или оказываемых услуг.
- Исследования рынка: проработанный вопрос о структуре промышленности в стране, импорт, экспорт, анализ продукции конкурентов или товаров заменителей.
- План мероприятий: проработанные инвестиционно-экономические мероприятия.
- Маркетинг: использование метода пять сил Портера, конкретизация характеристика целевых рынков.
- План выпуска продукции: инжиниринг всех этапов производства.
- Ремонт основных средств: проработка плана обслуживания и ремонта оборудования.
- Аналитика затрат: полный анализ себестоимости, калькуляции продукции.
- Экология и БЖД: анализ экологических рисков.
- Риски проекта: проработка структуры рисков проекта и их минимизация.
- Финансовое модель: проработка форм отчетности в соответствии с законодательством.

Строительное предприятие выполняло строительство жилых домов. Наблюдение за ним велось с декабря 2003 г. до конца 2008 г. (57 периодов) см. рис. 2.

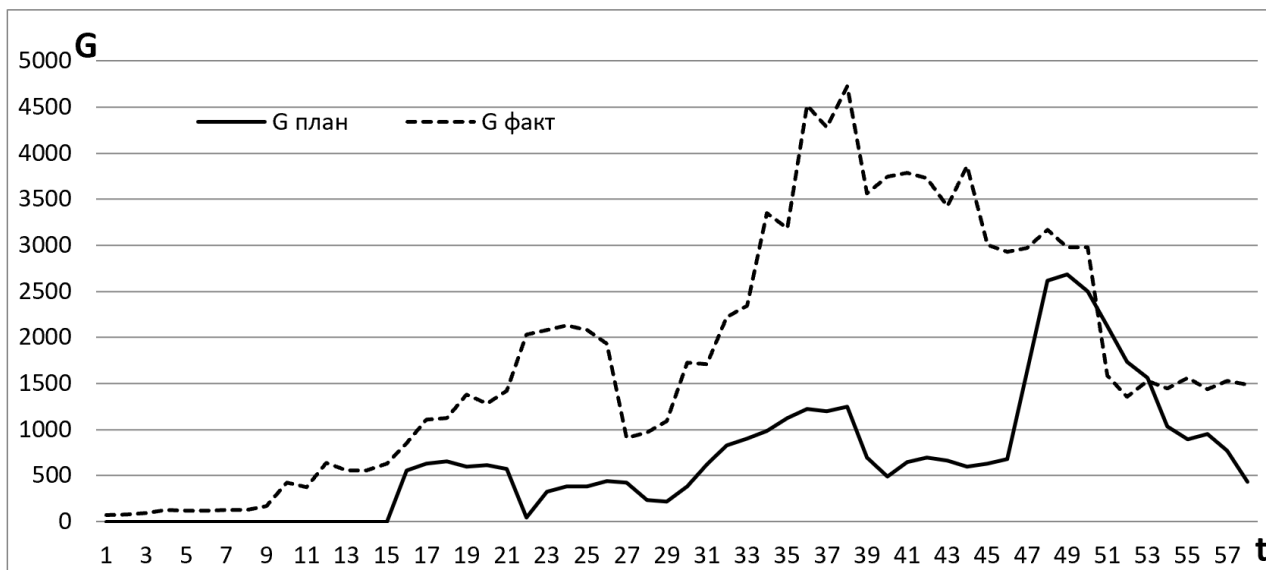


Рис. 2. Динамика G_i за $T=5$ лет при $k=6$ по формуле (10)

Важные события в системе см. рис. 2:

- утверждение рабочей проектной документации в 22 периоде,
- оформление разрешения на строительство в 32 периоде,
- внедрение системы менеджмента качества в 34 периоде,
- оформление и получение кредита в 40 периоде,
- начало работ по строительству в 42 периоде,
- открытие такого же строительного предприятия в 44 периоде.

В 34 периоде зафиксировано влияние мирового финансового кризиса с августа месяца.

Управление таким объектом возможно и с помощью подходов, не относящихся к теории управления: проектного управления (PMBoK), менеджмента качества (TQM), управление должностными инструкциями (HR). Управление выше озвученными методами представлено в отдельной работе [10].

5 Результаты исследований (моделирования)

Моделировалось состояние динамической системы (строительного предприятия) выполнено в авторском комплексе программ с параметрами: $k=1,2,3,t$ $m=T=5$ лет, пространство X состоит из параметров x_i описанных выше, $N=417$ значений, G_i – наблюдаемый интегральный показатель, u_i – управляющее воздействие при децентрализации принимаемых решений на департаменты и отделы предприятия. Влияние внешней среды v_i выражается через показатели: курсы валют, цены на ресурсы, опережающий рост зарплаты, тренд инвестиций в отрасли, технологические новинки, движение материальных потоков в отрасли, мероприятия по улучшению логистики, рынок трудовых ресурсов, цены на технологии, инфляция и т.д.

Динамика показателей: фактический показатель $G^{\text{сумм_общ}}(t)$, плановое значение $G^{\text{сумм_общ}}(t)$, прогноз фильтром Калмана $G^{\text{сумм_общ}}(t)$ отображены на графике см. рис. 3.

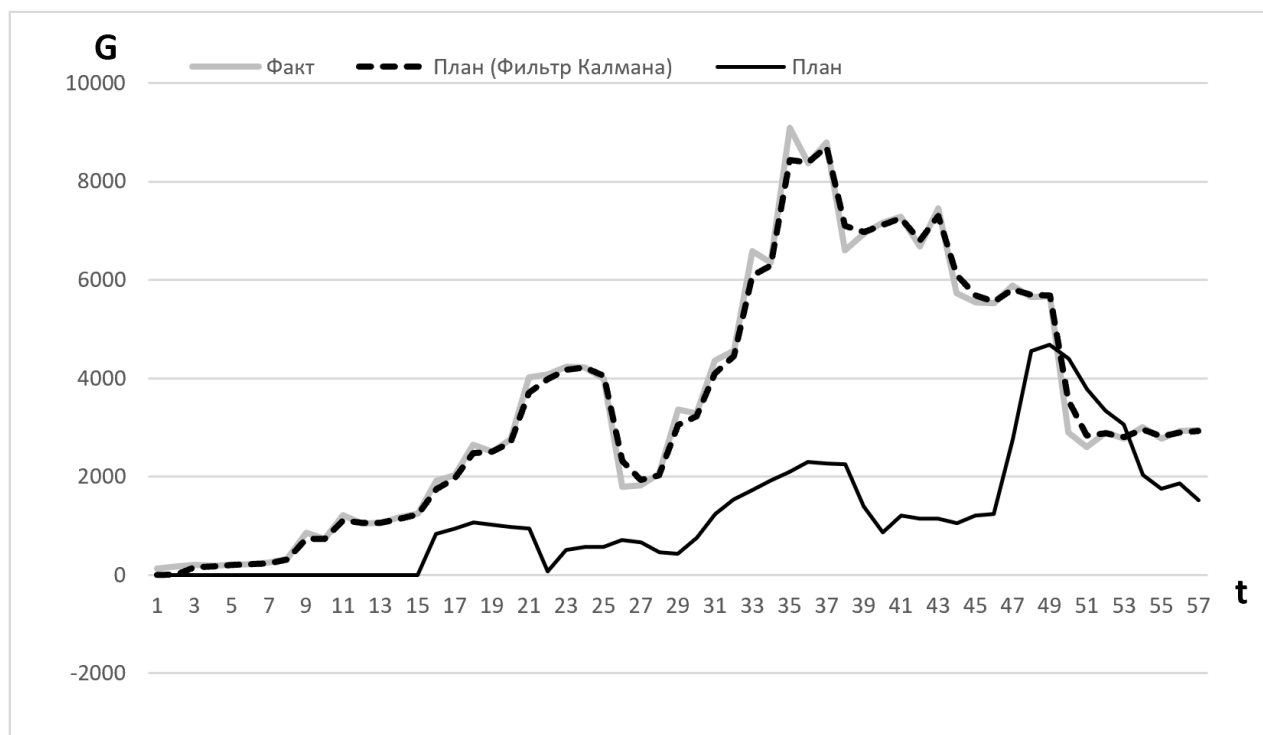


Рис. 3. Прогноз состояния многомерной динамической системы фильтром Калмана

Как видно из графика см. рис. 3 прогноз состояния динамической системы по интегральному показателю (12) возможен. Данный прогноз учитывает изменения размерности наблюдаемого объекта на каждом такте t . Однако, обнаружена другая проблема. При децентрализованном управлении центры принятия решения долго не могут предсказать состояние наблюдаемого объекта.

Данный вопрос требует дополнительного обсуждения.

6 Обсуждение результатов

Динамика наблюдаемого интегрального показателя включает в себя изменения внутренних параметров многомерной динамической системы и влияние на нее параметров внешней среды. Разделить внутреннее и внешнее влияние очень трудно, но известны t с наибольшим влиянием внешней среды. Фактическая ситуация в структуре объекта наблюдения и внешней среде сложилась так, что с 15 по 27 период и с 29 по 43 период деятельность динамической системы меняется наибольшим образом. Кризисные ситуации приводят к непредсказуемому изменению параметров работы предприятия. Данное утверждение зафиксировано через измерение дисперсий на основе фактического состояния и планируемых значений предприятия. Динамика фактических и плановых значений дисперсий представлена на графике см. рис. 4.

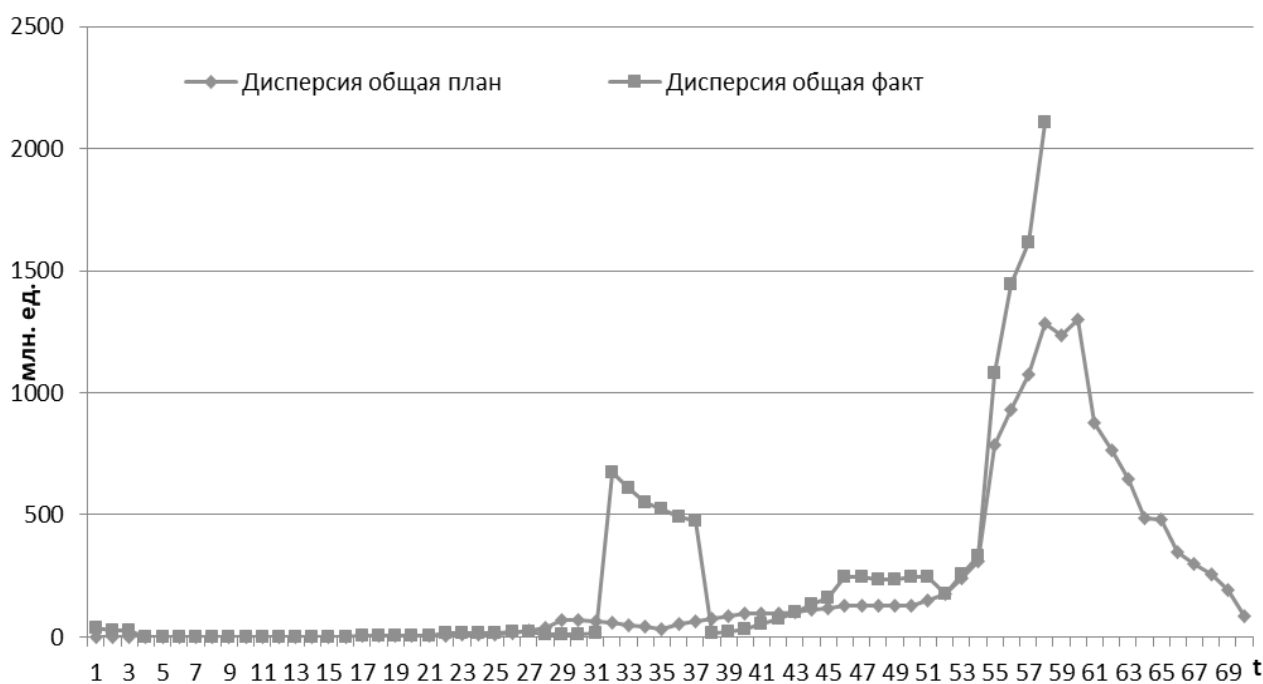


Рис. 4. Динамика плановых и фактических параметров дисперсии

Из графика видно см. рис. 4, что изменения состояния системы (факт) были ожидаемы и прогнозировались, но на сколько произойдут эти изменения спрогнозировать не получилось.

Можно предположить, что у центров принятия решений не было достаточно информации. Отчасти это верно, но в целом фактические параметры планируемых элементов динамической системы включали в себя изменения параметров внешней среды. Это видно если по формуле (11) взять $r_{кр}=0,1$ или $r_{кр}=0,9$, так как с изменением коэффициента значимости реакция динамической системы на влияние параметров внешней среды не меняется см. рис. 5.

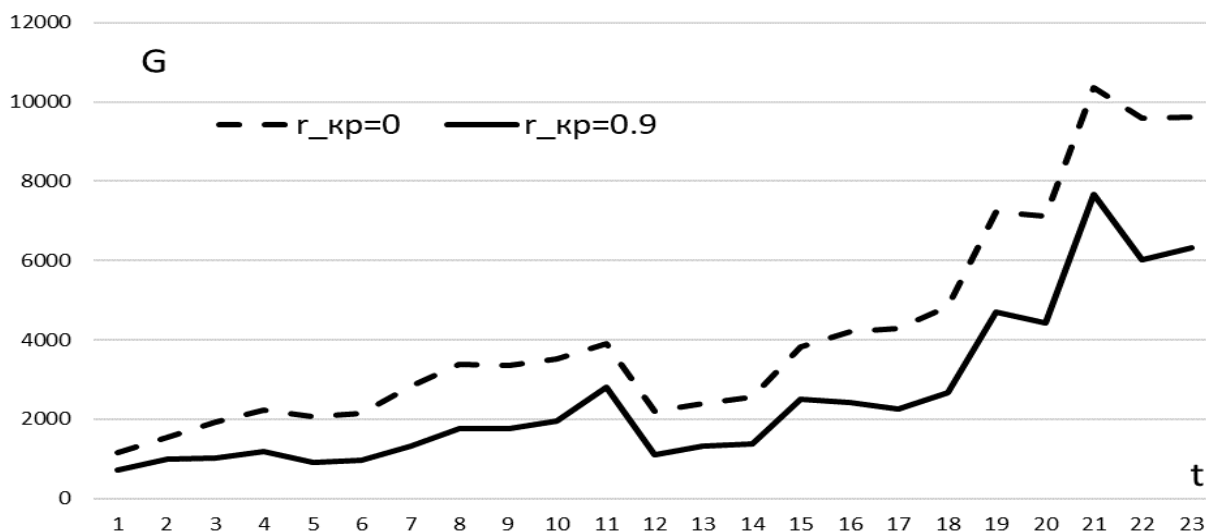


Рис. 5. Динамика G_i в зависимости от критического значения r_i

Многие реальные динамические системы нельзя точно описать предложенной в статье моделью. На практике неучтённая в модели динамика может серьёзно испортить рабочие характеристики фильтра, особенно при работе с неизвестным стохастическим сигналом на входе, что мы и наблюдали с 27 по 43 периоды. Более того, неучтённая в модели динамика может сделать фильтр неустойчивым. С другой стороны, независимый белый шум в качестве сигнала не будет приводить к расхождению алгоритма. Задача отделения шумов измерений от неучтённой в модели динамики сложна, решается она с помощью теории робастных систем управления.

Заключение (выводы)

Задачи, поставленные в начале работы выполнены:

- формализовано пространство изучаемого объекта (предприятие) как линейная динамическая система $S=\{T,X\}$,
- выполнено внедрение на реальном объекте исследования (строительное предприятие),
- использован фильтр Калмана для прогнозирования состояния объекта исследования (многомерная динамический объект).

Анализ прогнозируемых и фактических значений показал, что применение фильтра Калмана для получения прогноза интегральным показателем в теории возможно. На практике, невозможно из интегрального показателя получить значение вектора, очищенного от внешних возмущений, действующих на динамическую систему. Следовательно, сформировать точный прогноз на следующий период, затруднительно. После получения такой оценки необходимо выполнить разделение полученного результата на внутреннее возмущение и внешнее, через параметрическое моделирование объекта исследования.

Цель, поставленная в начале работы, применить фильтр Калмана для прогнозирования состояния многомерной динамической системы, интегральным показателем достигнута.

Литература

1. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems / R. E. Kalman. // Trans. of the ASME–Journal of Basic Engineering. – 1960. – Vol. 82, Series D. – P. 35–45.
2. Potter J.E. Statistical Filtering of Space Navigation Measurements / J. E. Potter, R. G. Stern // Proceedings of 1963 AIAA Guidance and Control Conference. – New York: AIAA, 1963.
3. Bierman G.J. Factorization methods for discrete sequential estimation / G. J. Bierman: New York: Academic Press, 1977. – 255 p.
4. Maybeck P.S. Stochastic models, estimation and control, Vol. 1. / P. S. Maybeck. – New York: Academic Press, Inc., 1979. – 423 p.
5. Kailath T. Linear estimation / T. Kailath, A. H. Sayed, B. Hassibi. – New Jersey: Prentice Hall, 2000. – 854 p.
6. Grewal M. S. Kalman filtering: theory and practice / M. S. Grewal, A. P. Andrews. – New Jersey: Prentice-Hall, 2001. – 410 p.

7. *Cobb C.W., Douglas P.H.* “A Theory of Production. American Economic Review,” December 1928, pp. 139-165.
8. *Leontief W.W.* The Structure of American Economy, 1919-1939 // Cambridge, Harvard University Press, 1941.
9. *Кротов В.Ф.* Основы оптимального управления // М.: Высшая школа. 1990. 430 с.
10. *Масаев С.Н.* Total quality management, РМВoК, HR как элементы моделирования состояния динамической системы для оценки управления резидента особой экономической зоны. Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XV Международной конференции (3 – 5 июня 2020 г., Москва) / [Ред. В. Н. Тхай]. — М.: ИПУ РАН, 2020.