DOI:

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАСЧЁТУ МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПРИНИМАЕМЫХ РЕШЕНИЙ В МЕНЕДЖМЕНТЕ, ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

Бывшев В.А.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва Ленинградский проспект, д.49

VByvshev@fa.ru

Аннотация: обсуждается подход к решению прямой и обратной задачи расчёта меры неопределённости в «мягких» вычислениях в менеджменте, экономике и финансах, базирующийся на восходящей к Гауссу классической теории ошибок и эконометрике. Даётся определение «мягким» вычислениям в рамках парадигм эконометрики и классической теории ошибок. Сделан вывод, что при проведении финансово-экономических и управленческих расчётов в ситуации неопределённости следует учитывать обсуждаемый подход, доставляющий элегантные, проверенные вековой практикой и лёгкие для интерпретации результаты.

Ключевые слова: мягкие вычисления, нечёткое множество, мера неопределённости исходной информации, эконометрика, теория ошибок, вероятностная модель.

1. Прямая и обратная задача расчёта меры неопределённости в «мягких» вычислениях в менеджменте, экономике и финансах

В любой задаче финансово-экономической или управленческих расчётов можно выделить три составляющие: 1) исходные данные задачи, то есть величины, значения которых известны; 2) искомые величины, значения которых нужно определить в процессе вычислений; 3) взаимосвязи F исходных данных и искомых величин. *Истинные* (как правило, неизвестные) значения исходных данных обозначим символами

$$(1.1) \quad x = (x_1, x_2, \dots, , x_n).$$

Истинные значения искомых величин обозначим символами

$$(1.2)\ y = (y_1, y_2, \dots, , y_m).$$

Приближённые (иначе говоря, *неопределённые*) *известные* значения исходных данных обозначим символами

$$(1.3) \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n).$$

Взаимосвязи величин (1.1) и (1.2) в самом общем случае можно описать векторным уравнением

$$(1.4)\ F(x, y) = 0,$$

определяющим искомые величины (1.2) как неявно заданные функции исходных данных (1.1), где отображение F удовлетворяет, по предположению, теореме о неявной функции[1] и, следовательно, каждую искомую величину y_i можно представить как явно заданную дифференцируемую функцию переменных (1.1):

$$(1.5) y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, , x_n), \ \ i = 1, 2, \dots m.$$

Систему уравнений (1.5) можно интерпретировать как расчётную схему решаемой финансово-экономической или управленческой задачи.

Определение 1. Вычисления искомых величин (1.2) финансово-экономической или управленческой задачи назовём «мягкими», если в итоге учитывается влияние на искомые величины неопределённость приближённых исходных данных (1.3). Другими словами, в «мягких» вычислениях осуществляется оценка меры неопределённости в вычисленных согласно (1.5) приближённых значениях

$$(1.5)\,'\ \tilde{y}_i = f_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n), \ \ i = 1, 2, \dots m.$$

искомых величин решаемой задачи.

Вернёмся к приближённым (иначе говоря, неопределённым) исходным данным (1.3). Каждую величину $\tilde{x}_j$ можно всегда представить в виде

$$(1.6)\ \tilde{x}_j = x_j + \Delta_j.$$

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», М., 1976, с.492.

где Δ_j – *ненаблюдаемая* ошибка в значении $\tilde{x}_j$, наличие которой, собственно, и означает неопределённость $\tilde{x}_j$. Будем интерпретировать[2] ошибки Δ_j как *случайные некоррелированные величины* с нулевыми математическими ожиданиями, $E(\Delta_j) = 0$, и ср. квадратическими отклонениями

$$(1.7)\ \ (\sigma_1,\ \dots, \sigma_n).$$

В такой трактовке ошибок Δ_j величин $\tilde{x}_j$ именно набор констант (1.7) служат мерой неопределённости исходных данных (1.3). В свою очередь, мерой неопределённости вычисленных по правилу (1.5) искомых величин $\tilde{y}_i$ решаемой финансово-экономической или управленческой задачи являются их ср. квадратические отклонения

$$(1.8)\ \ (\sigma_{\tilde{y}_1}, \sigma_{\tilde{y}_2}, \dots, \sigma_{\tilde{y}_m}).$$

Определение 2. Прямой задачей расчёта меры неопределённости в «мягких» вычислениях искомых величин $\tilde{y}_i$ назовём определение их меры неопределённости (1.8) по заданным значениям меры неопределённости (1.7) исходных данных (1.3). Соответственно, о*братной задачей* расчёта меры неопределённости в «мягких» вычислениях величин $\tilde{y}_i$ назовём определение меры неопределённости (1.7) исходных данных $\tilde{x}_i$ по заданным значениям меры неопределённости (1.8) искомых величин $\tilde{y}_i$.

2. Эконометрический подход к решению прямой и обратной задачи расчёта меры неопределённости в «мягких» вычислениях

При сделанных выше предположениях о свойствах ошибок Δ_i величин $\tilde{x}_i$ решение прямой задачи расчёта меры неопределённости в «мягких» вычислениях находится методом эконометрики и теории ошибок[3]:

$$(2.1)\ \sigma_{\tilde{y}_i}{}^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2 \cdot \left(\sigma_j\right)^2, i = 1,2, \dots, m.$$

Замечание 2.1. Правило (2.1) легко обобщить на ситуацию, когда ошибки Δ_j в исходных данных (1.3) являются коррелированными и известны коэффициенты корреляции ρ_{jk} ошибок этих:

$$(2.1)'\ \sigma_{\tilde{y}_i}{}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \cdot \sigma_j \cdot \sigma_k \cdot \rho_{jk}, \qquad i = 1,2, \dots, m.$$

Для практики финансово-экономических и управленческих расчётов более полезной является формула (2.1).

В обратной задаче расчёта меры неопределённости левые части уравнений (2.1) считаются *известными,* а искомыми являются расположенные в правых частях величины (1.7). В ситуации $m < n$ обратная задача расчёта меры неопределённости (1.7) не имеет единственное решение и, следовательно, является *некорректной по Адамару задачей*[4]. Метод решения некорректных задач заключается в учёте дополнительных условий, которым удовлетворяет искомое приближённое решение[5].

Для решения обратной задачи расчёта меры неопределённости (2.1) сформируем дополнительное условие, опираясь на известный в геофизических науках *принцип равных влияний.* Вот алгоритм реализации этого принципа в задаче (2.1).

Шаг 1. Фиксируем номер i уравнения из системы (2.1) и определяем входящие в него искомые величины σ_j согласно *принципу равных влияний*:

$$(2.2)\ \ \left(\sigma_j\right)^2 = \frac{\sigma_{\tilde{y}_i}{}^2}{n \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}, \quad j = 1,2, \dots, n,$$

предполагая, что $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2 > 0$. Очевидно, что найденные по правилу (2.2) значения σ_j, где $j = 1,2, \dots, n$, зависят от номера уравнения i, где $i = 1,2, \dots, m$, и мы обозначим это факт $\sigma_j(i)$.

Шаг 2. Определяем искомые значения (1.7) по правилу (минимум берётся по i):

---

[2] *Бывшев В.А., Михалёва М.Ю. Методика оценки меры неопределённости значений эндогенных переменных в дескриптивных экономико-математических моделях. Материалы XVIII Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям, М., ФУ, 2015г.*

[3] *Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. М., «Мир», 1985, с. 80.*

[4] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. – «Наука», 1979, с.16.*

[5] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. – «Наука», 1979, с.18.*

$$(2.3)\ \sigma_j = min\{\sigma_j(i)\}$$

Если исходные данные (1.3) вычислительной задачи будут обладать найденными по данному алгоритму уровнями меры неопределённости (1.7), то в решении (1.5) будут заведомо обеспечены заданные уровни меры неопределённости (1.8).

3. Пример решения прямой и обратной задачи мягких вычислений для оценки привлекательности инвестиционного проекта

Ниже приведён пример расчёта меры неопределённости модифицированной нормы доходности инвестиционного проекта. Модифицированная внутренняя норма доходности, *MIRR* [7, с. 92] определяется уравнением

$$(3.1) \sum_{t=0}^{T} \frac{COF_t}{(1+r)^t} = \frac{\sum_{t=0}^{T} CIF_t \cdot (1+r)^{T-t}}{(1+MIRR)^T},$$

где COF_t – это инвестиции в актив, CIF_t – доход от актива за период t. Левая часть уравнения (3.1) имеет смысл дисконтированной стоимости всех инвестиций в актив. Обозначим эту величину символом PVO. В числителе правой части находится наращенная стоимость всех поступлений от актива, которую именуют терминальной стоимостью, и мы обозначим данную величину символом TVI. Правая часть уравнения (3.1) – это дисконтированная по ставке *MIRR* терминальная стоимость актива. Рассматривая (3.1), констатируем, что величина *MIRR*, имеющая положительное значение, существует и единственна тогда и только тогда, когда $TVI > PVO$, что ниже и будем предполагать. Отметим, что уравнение (3.1) служит полезным примером общего уравнения (1.4).

Подчеркнём, что инвестиционный проект признаётся пригодным для реализации, если соответствующий ему коэффициент дисконтирования r удовлетворяет неравенству

$$(3.2) r \leq MIRR.$$

Ниже построим для величины *MIRR* интервал неопределённости

$$(3.3) MIRR^- \leq MIRR \leq MIRR^+,$$

и, в соответствии с этим интервалом, наш принцип отбора инвестиционных проектов во множество допустимых проектов будет базироваться на неравенстве

$$(3.4) r \leq MIRR^-.$$

Заметим, что уравнение (3.1) можно переписать в следующем виде

$$(3.5)\ \ln(1+MIRR) = \frac{1}{T} \cdot (\ln(TVI) - \ln(PVO)).$$

В свою очередь, терминальную стоимость проекта TVI удобнее представить так:

$$(3.6) TVI = (1+r)^T \cdot \sum_{t=0}^{T} \frac{CIF_t}{(1+r)^t},$$

Известно [8, с. 208], что элементы (COF_t, CIF_t) будущего денежного потока определяются в результате разработки бюджета капиталовложений. Поскольку будущее всегда неопределённо, элементы (COF_t, CIF_t) оказываются приближёнными величинами. Чтобы подчеркнуть данное обстоятельство, символы (COF_t, CIF_t) сохраним за точными значениями элемента денежного потока. В свою очередь, символами $\left(\widetilde{COF}_t, \widetilde{CIF}_t\right)$ обозначим известное приближённое значение величин (COF_t, CIF_t). Следовательно, при анализе инвестиционного проекта из расчётов оказываются известными приближённые величины $\widetilde{NPV}(r)$ и $\widetilde{MIRR}$. Прямая задача расчёта меры неопределённости заключается в оценке точности величины $\widetilde{MIRR}$, т.е. в расчёте её ср. кв. отклонения $\sigma_{\widetilde{MIRR}}$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Пусть элементы $\left(\widetilde{COF}_t, \widetilde{CIF}_t\right)$ денежного потока определены с относительной точностью δ (например, $\delta = 0{,}05$ или 0,1) и истинные ошибки $\Delta_t = (\Delta\widetilde{COF}_t, \Delta\widetilde{CIF}_t)$ этих элементов попарно некоррелированные. Тогда ср. кв. отклонение $\sigma_{\widetilde{MIRR}}$ величины $\widetilde{MIRR}$, вычисленное согласно (2.1), имеет вид

$$(3.7) \sigma_{\widetilde{MIRR}} = \delta \cdot R,$$

где

$$(3.8)\ R = \left(\frac{1+MI\widetilde{R}R}{T}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{(1+r)^T}{\widetilde{TVI}}\right)^2\cdot\sum_{t=0}^{T}\left(\frac{\widetilde{CIF}_t}{(1+r)^t}\right)^2+\frac{1}{\widetilde{PVO}^2}\sum_{t=0}^{T}\left(\frac{\widetilde{COF}_t}{(1+r)^t}\right)^2}.$$

Следствие. Границы простейшего интервала неопределённости модифицированной внутренней нормы доходности могут быть определены по правилу

$$(3.9)\ \left.\begin{matrix} MIRR^- = \widetilde{MIRR} - \delta\cdot R \\ MIRR^+ = \widetilde{MIRR} + \delta\cdot R \end{matrix}\right\},$$

Приведём доказательство утверждения (3.7), которое базируется на правиле (2.1) решения прямой задачи. Вернёмся к уравнению (3.5) и, рассуждая в дифференциалах, получим на основании этого уравнения взаимосвязь истинных ошибок входящих в данное уравнение величин:

$$(3.10)\ \frac{\Delta\widetilde{MIIR}}{(1+MIIR)} = \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{\Delta\widetilde{TVI}}{TVI}-\frac{\Delta\widetilde{PVO}}{PVO}\right).$$

Здесь символами $\Delta\widetilde{MIIR}$, $\Delta\widetilde{TVI}$, $\Delta\widetilde{PVO}$ обозначены истинные ошибки соответствующих величин, генерированные истинными ошибками $\Delta_t = (\Delta\widetilde{COF}_t, \Delta\widetilde{CIF}_t)$ элементов денежного потока. Теперь определяем на основании уравнения

$$(3.11)\widetilde{PVO} = \sum_{t=0}^{T}\frac{\widetilde{COF}_t}{(1+r)^t}$$

правило расчёта величины $\Delta\widetilde{PVO}$:

$$(3.12)\Delta\widetilde{PVO} = \sum_{t=0}^{T}\frac{\Delta\widetilde{COF}_t}{(1+r)^t}.$$

Рассуждая аналогично применительно к уравнению (3.6), находим формулу расчёта величины $\Delta\widetilde{TVI}$:

$$(3.13)\Delta\widetilde{TVI} = (1+r)^T\cdot\sum_{t=0}^{T}\frac{\Delta\widetilde{CIF}_t}{(1+r)^t}.$$

Будем предполагать, что истинные ошибки Δ_t элементов $\left(\widetilde{COF}_t, \widetilde{CIF}_t\right)$ финансовых потоков по проекту являются центрированными и попарно некоррелированными случайными величинами, т.е.

$$(3.14)E(\Delta_t) = 0, \qquad \rho(\Delta_t, \Delta_\tau) = 0$$

при $t \neq \tau$, и, кроме того, все элементы $\left(\widetilde{COF}_t, \widetilde{CIF}_t\right)$ имеют одинаковую относительную точность δ, т.е.

$$(3.15)\Delta_t = \delta\cdot\left(\widetilde{COF}_t, \widetilde{CIF}_t\right).$$

Замечание 3.1. Мы полагаем, что известно значение $|\delta|$, которое ниже будем обозначать символом δ, что не должно приводить к недоразумениям. Например, если $\delta = 0{,}1$, то это значит, что финансовые потоки $\widetilde{CF}_t$ по проекту определены с точностью 10%.

С учётом (2.1) и уравнений (3.10), (3.12) и (3.13) получаем правило (3.7) – (3.8) расчёта ср. кв. отклонения величины $\widetilde{MIRR}$.

Пример [2] расчёта меры неопределённости величины $\widetilde{MIRR}$ по правилу (3.7) – (3.8) для регионального инвестиционного проекта «Застройка жилого района «Чистые пруды» в г. Кирове» [9] приведён в табл. 1. Проект характеризуется следующими показателями: $NPV = 25{,}14$ млн. руб., $IRR = 0{,}1929$, $WACC = 0{,}1298$. Вычисленные по значениям $\{COF_t, CIF_t\}$ из таблицы 1 величины $\widetilde{MIRR}$, R и $\sigma_{MI\widetilde{R}R}$ оказались при $r = WACC = 0{,}1298$ такими:

$$(3.16)\ \widetilde{MIRR} = 0{,}1307,\ R = 0{,}1588,\ \sigma_{MI\widetilde{R}R} = 0{,}016.$$

Таблица 1. Финансовые потоки по инвестиционному проекту и расчёт меры неопределённости величины $\widetilde{MIRR}$ при δ=0,1

t	2009	2010	2011	2012	2013
COF_t	1812,29	2047,52	2313,29	2613,55	—
CIF_t	1677,71	2071,63	2283,16	2696,41	175,62
CF_t	-134,58	24,11	-30,13	82,86	175,62
$\widetilde{MIRR} = 0{,}1307$					
$MIRR^- = \widetilde{MIRR} - 0{,}1 \cdot R = 0{,}1307 - 0{,}1 \cdot 0{,}1588 = 0{,}1148$					
$MIRR^+ = \widetilde{MIRR} + 0{,}1 \cdot R = 0{,}1307 + 0{,}1 \cdot 0{,}1588 = 0{,}1466$					

Рассматривая полученные результаты, констатируем, что при заявленном уровне средней взвешенной стоимости капитала $r =$ WACC = 0,1298 и относительной точности бюджетирования денежных потоков δ = 0,1 данный проект может оказаться коммерчески непривлекательным. Чтобы это увидеть, решим обратную задачу расчёта меры неопределённости, то есть определим точность δ исходных данных (точность бюджетирования финансовых потоков), при которой данный проект окажется коммерчески привлекательным.

В данном примере обратная задача является корректной и решается особенно просто. Действительно, чтобы проект оказался коммерчески привлекательным, достаточно справедливости неравенства (3.4). С учётом (3.9) это неравенство принимает вид

$$(3.17) \quad r \leq \widetilde{MIRR} - \delta \cdot R.$$

Отсюда следует неравенство для искомой точности бюджетирования δ данного проекта:

$$(3.18) \quad \delta \leq \frac{\widetilde{MIRR} - r}{R} = \frac{0{,}1307 - 0{,}1298}{0{,}1588} = 0{,}006 = 0{,}6\%.$$

Следовательно, инвестиционный проект «Застройка жилого района «Чистые пруды» в г. Кирове» окажется коммерчески привлекательным, если точность бюджетирования денежных потоков по этому проекту не хуже 0,6%.

Выводы

1. При проведении управленческих и финансово-экономических расчётов в условиях неопределённости разумно использовать обсуждённый выше подход, который представляется полезным для практики методом «мягких» вычислений в менеджменте, экономике и финансах.

2. Вероятностная модель, лежащая в основании обсуждённого выше подхода, не представляется более искусственной и тяжеловесной, чем модель функции принадлежности [5, стр. 40], на которой базируются «мягкие» вычисления Л. Заде [10].

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», М., 1976.
2. *Бывшев В.А., Михалёва М.Ю.* Методика оценки меры неопределённости значений эндогенных переменных в дескриптивных экономико-математических моделях. Материалы XVIII Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям, М., ФУ, 2015г.
3. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. М., «Мир», 1985.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М. – «Наука», 1979.
5. *Волкова Е.С., Гисин В.Б.* Нечёткие множества и мягкие вычисления в экономике и финансах. Учебное пособие для подготовки бакалавров и магистров. Финуниверситет, 2014.
6. *Бывшев В.А.* Классическая теория ошибок как альтернатива «мягким вычислениям» // Экономика и управление. – 6, том 3(66) 2017 июнь, с. 230-234.
7. *Ковалёв В.В.* Методы оценки инвестиционных проектов. – М.: Финансы и статистика, 1998.
8. *Бригхем Ю., Гапенски Л.* Финансовый менеджмент: Т.1. – СПб: Экономическая школа, 1998.
9. Презентации региональных инвестиционных проектов [Электронный ресурс]. – http://www.minregion.ru/invest_phound/presents_reg/.
10. *Zadeh, Lotfi A.*, “Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing”, Communications of the ASM, the March 1994, Vol. 37 No. 3, pages 77 - 84.